ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

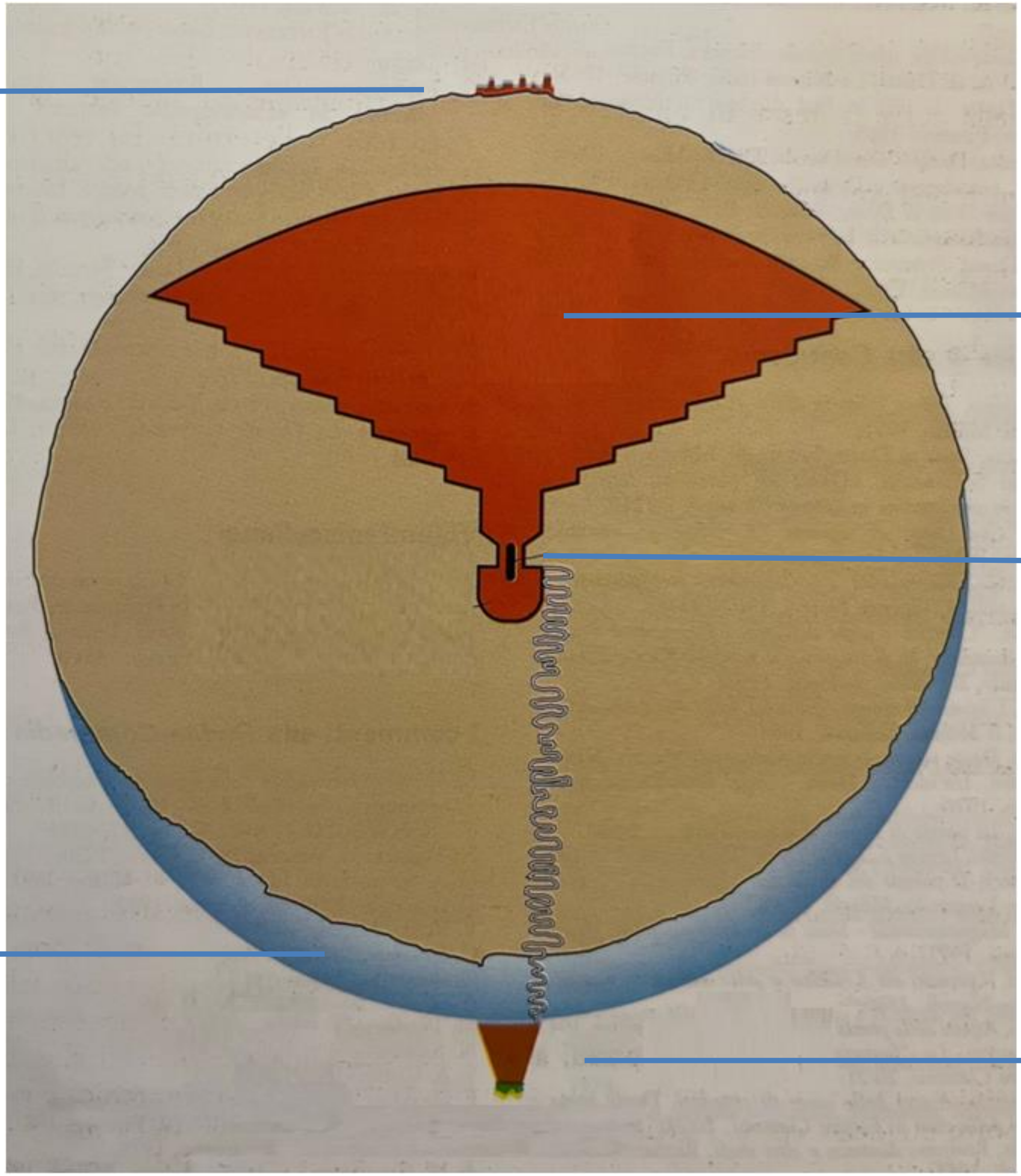
Dante e la zara

Un percorso matematico tra teoria ed esperienza

Giovanni Cupini

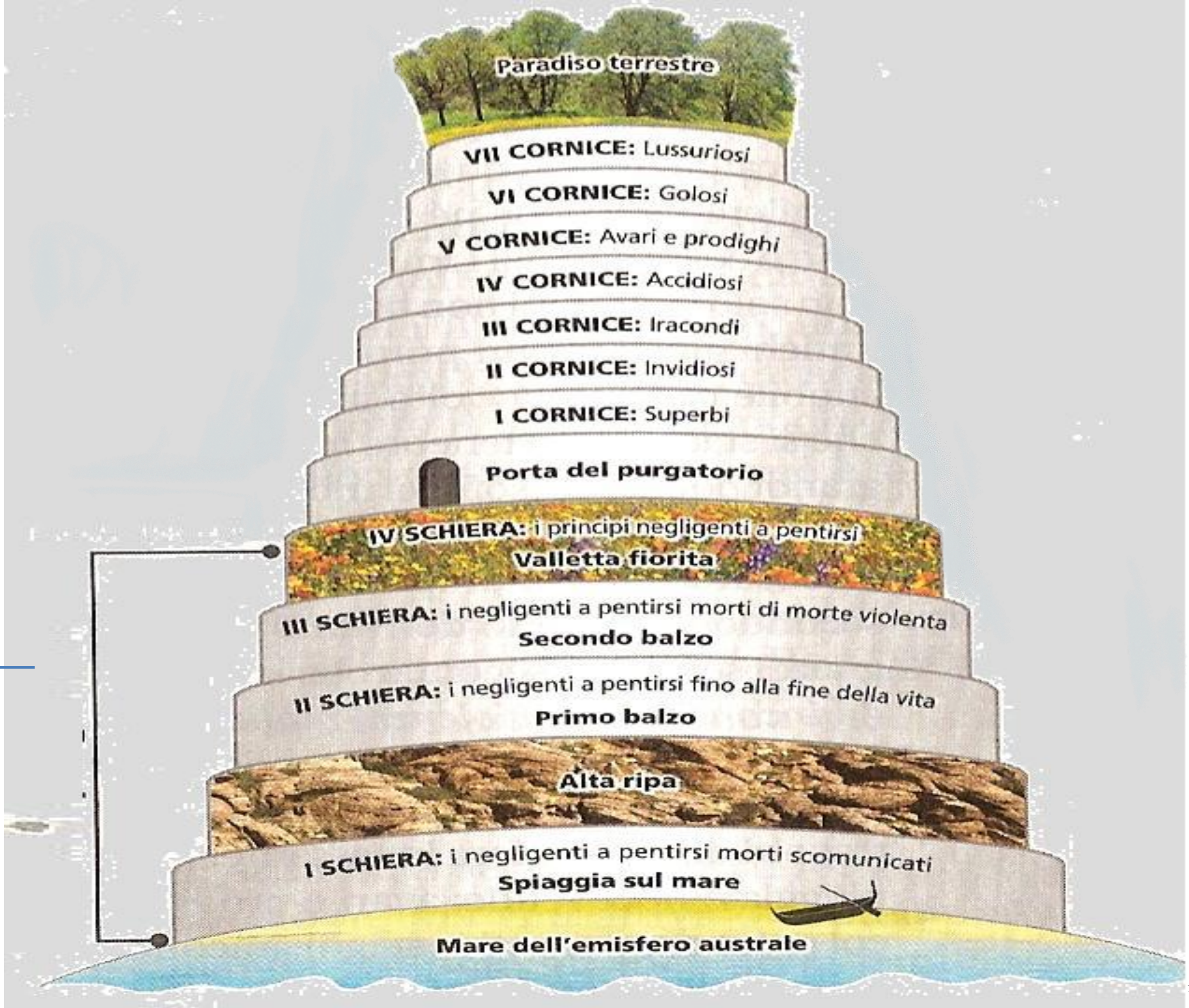
Dipartimento di Matematica

Purgatorio e Inferno nella concezione di Dante



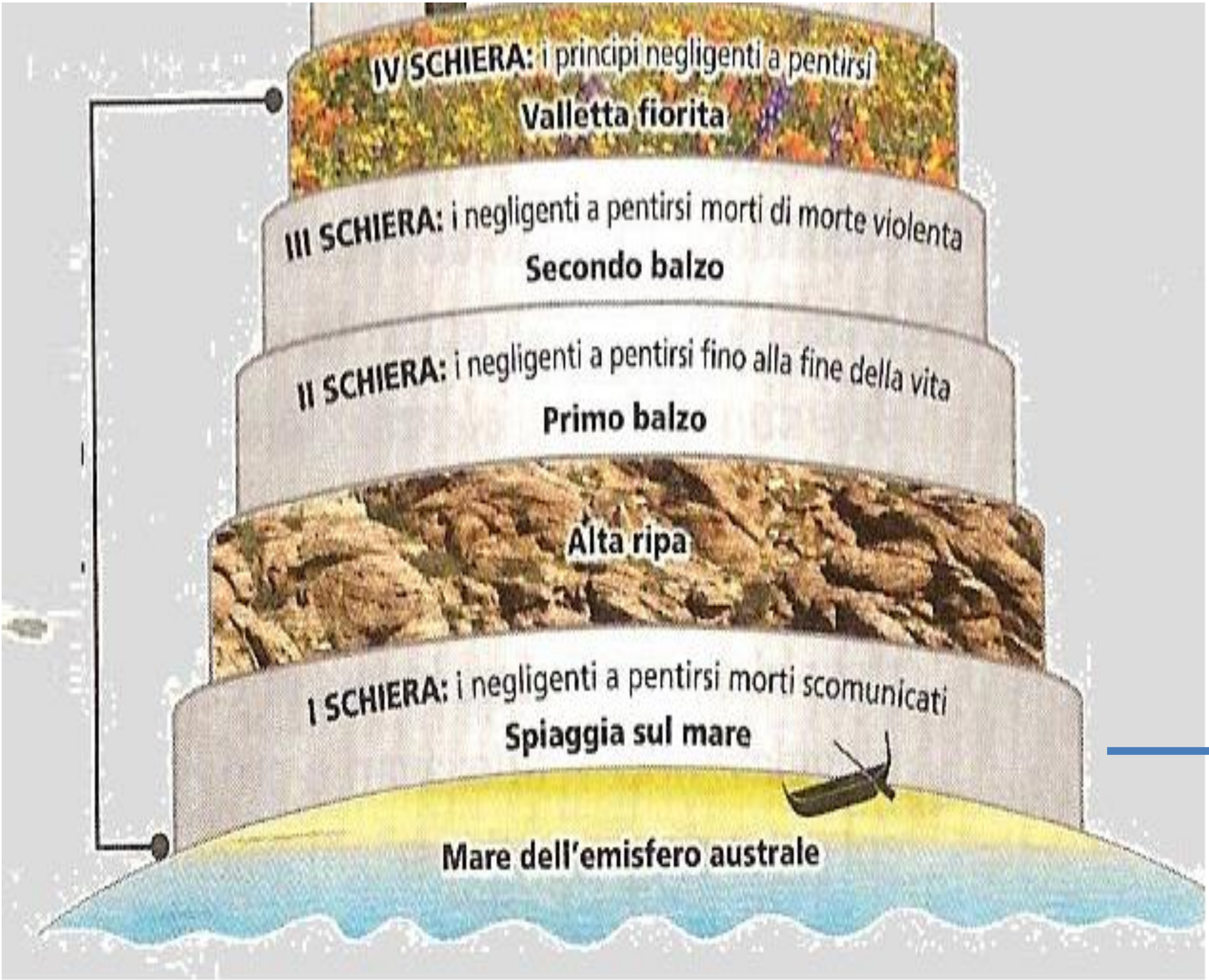
Purgatorio

Antipurgatorio



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

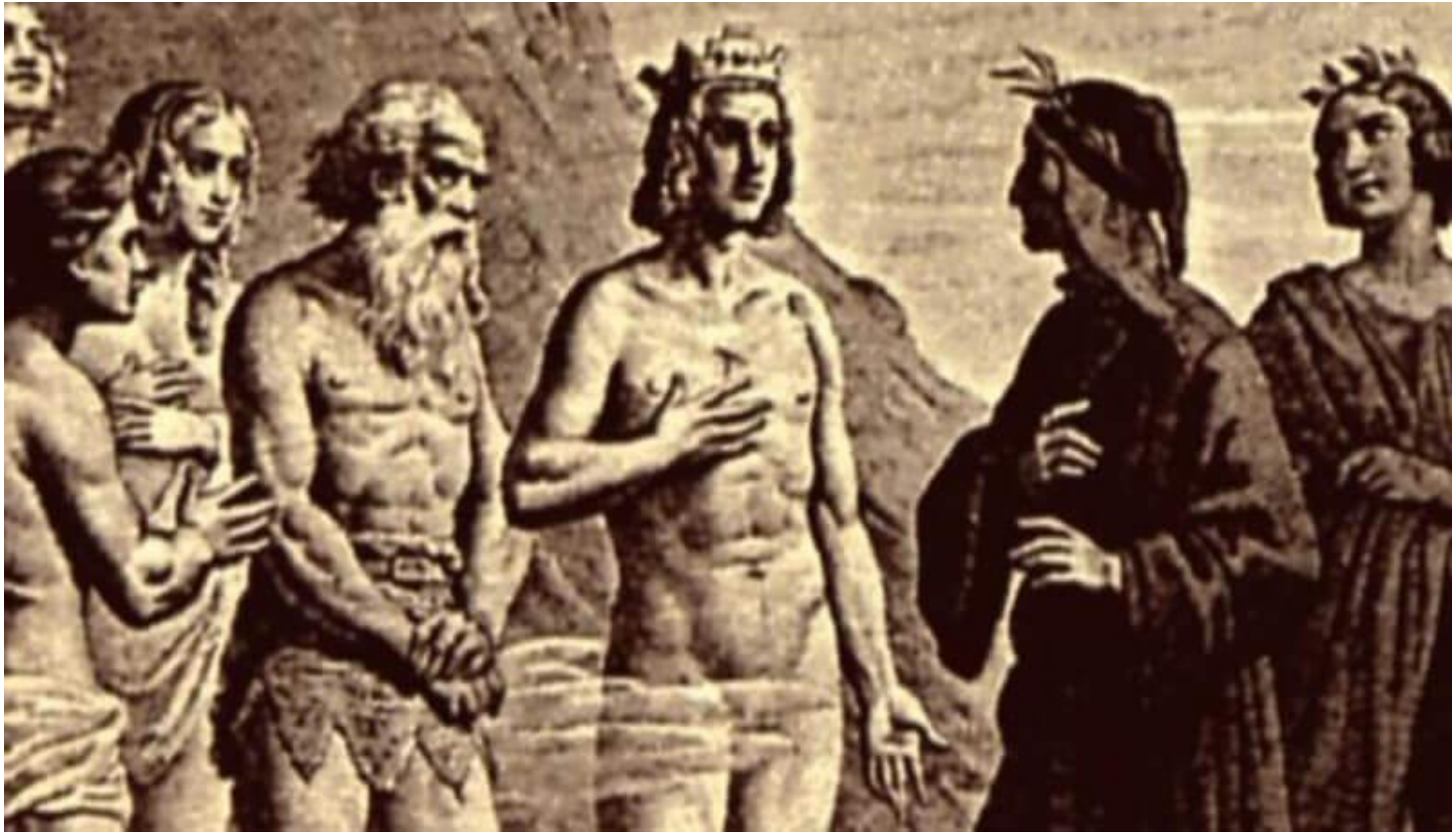
I morti scomunicati



→ Manfredi

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dante incontra Manfredi

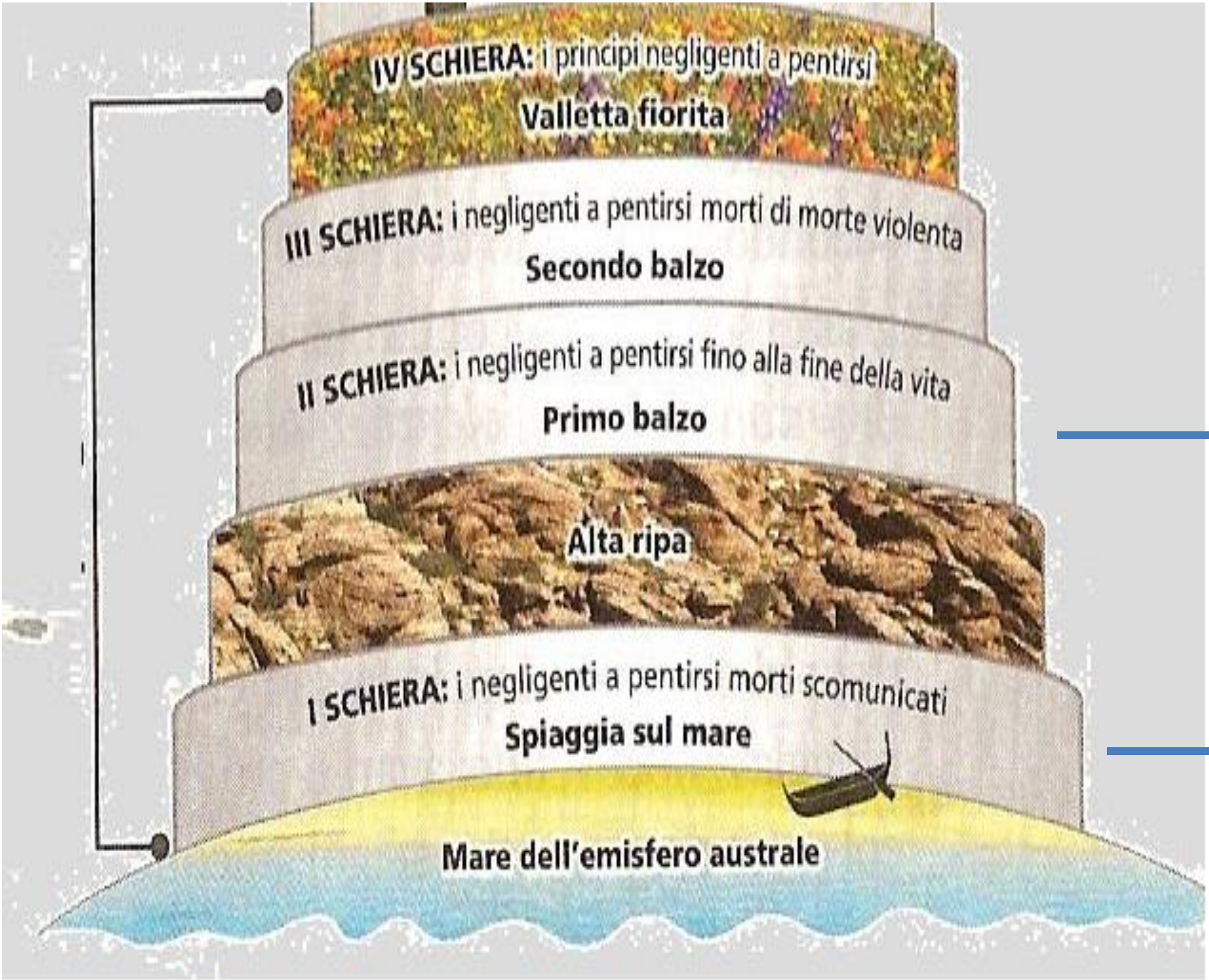


Manfredi spiega a Dante che…

III canto - Manfredi
«Vero è che quale in contumacia more
di Santa Chiesa, ancor ch'al fin si penta,
star li convien da questa ripa in fore,
per ognun tempo ch'elli è stato, trenta,
in sua presunzion, *se tal decreto*
più corto per buon prieghi non diventa.»

«E' vero che chi muore scomunicato
dalla Santa Chiesa, anche se si pente in punto di morte,
è necessario che stia al di fuori di questo monte,
per un tempo pari a trenta volte
quanto egli è rimasto nel suo errore, *a meno che questo tempo non diventi*
più breve grazie alle preghiere dei buoni.»

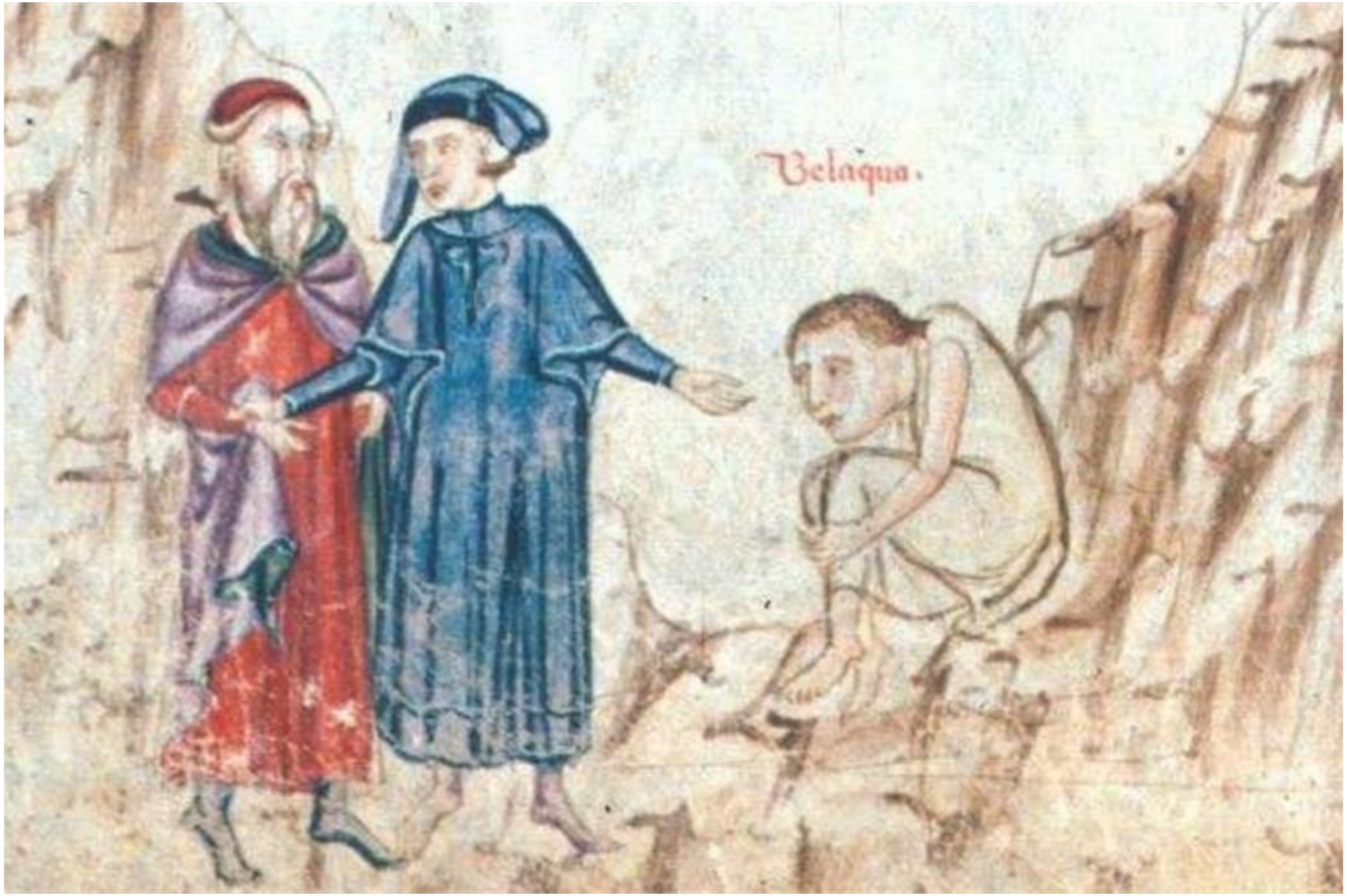
I morti negligenti



Belacqua

Manfredi

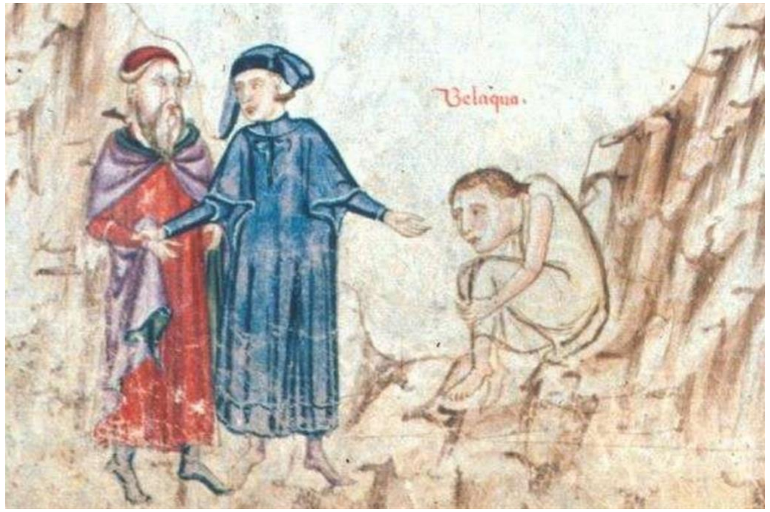
Dante incontra Belacqua



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Belacqua spiega a Dante che…

IV canto - Belacqua
«Prima convien che tanto il ciel m'aggiri
di fuor da essa, quanto fece in vita,
perch'io 'ndugiai al fine i buon sospiri,
<u>se orazione in prima non m'aita</u>
che surga sù di cuor che in grazia viva;
l'altra che val, che 'n ciel non è udita?»



«Prima occorre che il cielo ruoti intorno a me
fuori dalla porta del Purgatorio tante volte quanto lo fece quando io ero in vita,
poiché rimandai all'ultima ora il pentimento,
<u>a meno che non mi aiutino</u> [a ridurre questo tempo di attesa] ***<u>le preghiere</u>***
nate dal cuore di chi vive in Grazia di Dio;
le altre che valore hanno, dal momento che in cielo non vengono ascoltate»?

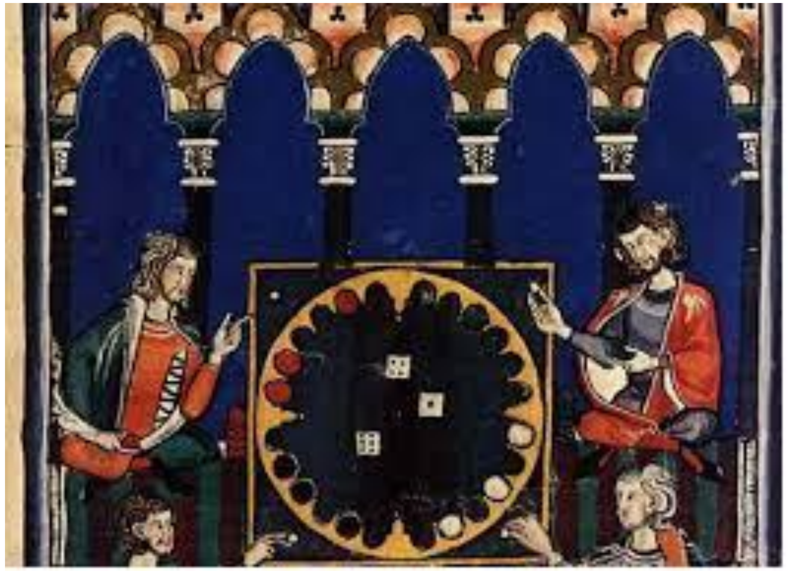
Dante incontra i morti di morte violenta

Dante incontra i morti di morte violenta

Le **anime dei morti di morte violenta** riconoscono Dante come vivente e si accalcano attorno a lui per sollecitare preghiere di suffragio.

Dante descrive ciò paragonandosi al vincitore di una partita a ***zara***.

La zara



La **zara** era un gioco d’azzardo popolare all’epoca di Dante:
si giocava in due, usando tre dadi.

A turno ogni giocatore dichiara, prima di lanciare i tre dadi, quale sarà la **somma dei numeri che usciranno**.

Vince chi ottiene il punteggio dichiarato.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dante e la zara

Quando si parte il gioco de la *zara*
colui che perde si riman dolente
repetendo le volte, e tristo impara;

con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente;

el non s'arresta, e questo e quello intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.

Tal era io in quella turba spessa,
volgendo a loro, e qua e là, la faccia,
e promettendo mi sciogliea da essa.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

I strofa

Quando si parte il gioco de la **zara**
colui che perde si riman dolente
repetendo le volte, e tristo impara;

Quando si conclude il gioco della **zara**,
colui che ha perso è amareggiato,
e nella sua mente ripercorre i lanci dei dadi che hanno deciso il gioco, e capisce dove ha sbagliato;

II strofa

con **l'altro** se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente

con il **vincitore** se ne vanno tutti gli spettatori;
chi gli cammina davanti, chi lo afferra da dietro,
e chi al suo fianco si fa notare da lui

III strofa

el non s'arresta, **e questo e quello intende**;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.

ma il vincitore non si ferma, **e ascolta gli uni e gli altri**;
a chi egli dà una mancia, questi smette di stargli addosso;
e così riesce a farsi largo nella calca.

IV strofa

Tal era io in quella turba spessa,
volgendo a loro, e qua e là, la faccia,
e promettendo mi sciogliea da essa.

Nella stessa situazione [del vincitore della zara] ero io in
quella fitta schiera di anime,
e volgendo loro lo sguardo, un po' da una parte e un po' dall'altra,
e promettendo [di raccomandarle alle preghiere dei viventi]
riuscivo a farmi largo tra la folla.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

La zara

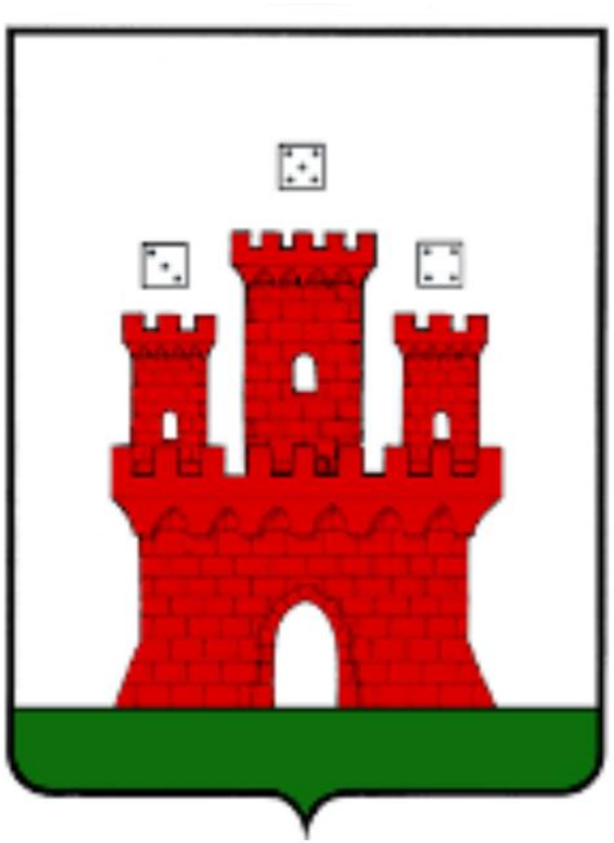
Il termine “**zara**” viene dall’arabo “**zahr**” che significa “**dado**”.

Con l’articolo, “**az-zahr**”, dà origine alla parola **“azzardo”**

Il gioco d’azzardo ha rovinato le finanze di molte persone.

Castell' Azzara

Due fratelli Aldobrandeschi risolsero una contesa tra loro giocandosi con una partita a zara un castello nel 1212, da cui il nome della cittadina **Castell'Azzara** (GR).



Nello stemma di Castell'Azzara è raffigurata una fortezza rossa con tre torri sormontate da tre dadi da gioco segnati coi punti 3 - 5 - 4.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Cosimo II

Cosimo II (1590-1621), Granduca di Toscana, ricevette un'educazione ampia e moderna:

cultura classica
cosmografia
disegno
matematica
meccanica
danza
lingue (tra le quali tedesco e castigliano)

Cosimo II (1590-1621)

Cosimo II e Galileo Galilei

Cosimo II ebbe come precettore anche Galileo Galilei.

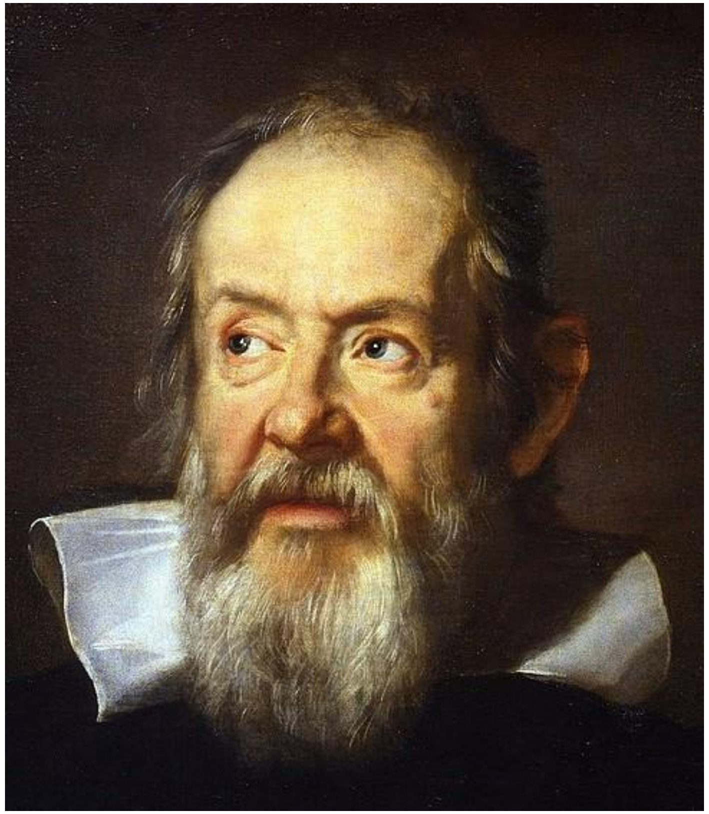
Il Granduca, accanito giocatore, sollecita Galilei a studiare il gioco della **zara**.

Galileo, nel saggio

Sopra le scoperte dei dadi(1612)

diede una **spiegazione completa** del gioco e su quali numeri convenisse scommettere.

Se ne occupò anche Cardano in «De ludo aleae» (1564)



Galileo Galilei (1564-1642)

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Probabilità nella zara

In un dado (non truccato)

non c'è una faccia privilegiata rispetto alle altre.

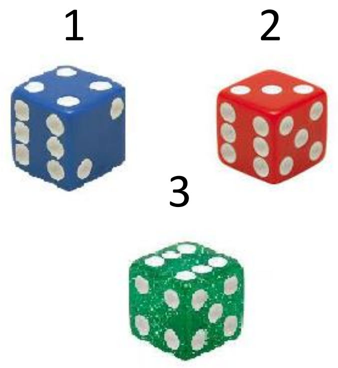
Inoltre

l'esito di un dado non influenza l'esito degli altri.

In queste condizioni, la probabilità che lanciando tre dadi si ottenga come somma il numero X è uguale a un rapporto:

$$P(\text{somma} = X) = \frac{\textbf{numero dei casi favorevoli} \text{ alla somma uguale a } X}{\textbf{numero dei casi possibili}}$$

I casi possibili



I **casi possibili** che si possono verificare lanciando tre dadi sono tanti quante sono le sequenze di tre numeri

(a, b, c)

dove

a indica il numero ottenuto col **Dado 1**
b indica il numero ottenuto col **Dado 2**
c indica il numero ottenuto col **Dado 3**.

I casi possibili

(1,1,1) (1,1,2) (1,1,3) (1,1,4) (1,1,5) (1,1,6) (1,2,1) (1,2,2) (1,2,3) (1,2,4) (1,2,5) (1,2,6) (1,3,1) (1,3,2) (1,3,3) (1,3,4) (1,3,5) (1,3,6) (1,4,1) (1,4,2) (1,4,3) (1,4,4) (1,4,5) (1,4,6) (1,5,1) (1,5,2) (1,5,3) (1,5,4) (1,5,5) (1,5,6) (1,6,1) (1,6,2) (1,6,3) (1,6,4) (1,6,5) (1,6,6)

(2,1,1) (2,1,2) (2,1,3) (2,1,4) (2,1,5) (2,1,6) (2,2,1) (2,2,2) (2,2,3) (2,2,4) (2,2,5) (2,2,6) (2,3,1) (2,3,2) (2,3,3) (2,3,4) (2,3,5) (2,3,6) (2,4,1) (2,4,2) (2,4,3) (2,4,4) (2,4,5) (2,4,6) (2,5,1) (2,5,2) (2,5,3) (2,5,4) (2,5,5) (2,5,6) (2,6,1) (2,6,2) (2,6,3) (2,6,4) (2,6,5) (2,6,6)

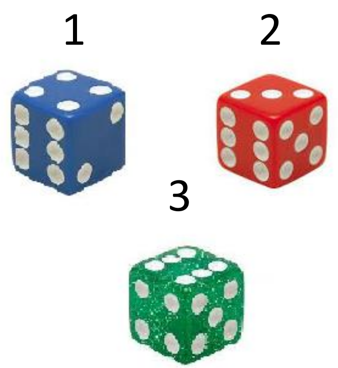
(3,1,1) (3,1,2) (3,1,3) (3,1,4) (3,1,5) (3,1,6) (3,2,1) (3,2,2) (3,2,3) (3,2,4) (3,2,5) (3,2,6) (3,3,1) (3,3,2) (3,3,3) (3,3,4) (3,3,5) (3,3,6) (3,4,1) (3,4,2) (3,4,3) (3,4,4) (3,4,5) (3,4,6) (3,5,1) (3,5,2) (3,5,3) (3,5,4) (3,5,5) (3,5,6) (3,6,1) (3,6,2) (3,6,3) (3,6,4) (3,6,5) (3,6,6)

(4,1,1) (4,1,2) (4,1,3) (4,1,4) (4,1,5) (4,1,6) (4,2,1) (4,2,2) (4,2,3) (4,2,4) (4,2,5) (4,2,6) (4,3,1) (4,3,2) (4,3,3) (4,3,4) (4,3,5) (4,3,6) (4,4,1) (4,4,2) (4,4,3) (4,4,4) (4,4,5) (4,4,6) (4,5,1) (4,5,2) (4,5,3) (4,5,4) (4,5,5) (4,5,6) (4,6,1) (4,6,2) (4,6,3) (4,6,4) (4,6,5) (4,6,6)

(5,1,1) (5,1,2) (5,1,3) (5,1,4) (5,1,5) (5,1,6) (5,2,1) (5,2,2) (5,2,3) (5,2,4) (5,2,5) (5,2,6) (5,3,1) (5,3,2) (5,3,3) (5,3,4) (5,3,5) (5,3,6) (5,4,1) (5,4,2) (5,4,3) (5,4,4) (5,4,5) (5,4,6) (5,5,1) (5,5,2) (5,5,3) (5,5,4) (5,5,5) (5,5,6) (5,6,1) (5,6,2) (5,6,3) (5,6,4) (5,6,5) (5,6,6)

(6,1,1) (6,1,2) (6,1,3) (6,1,4) (6,1,5) (6,1,6) (6,2,1) (6,2,2) (6,2,3) (6,2,4) (6,2,5) (6,2,6) (6,3,1) (6,3,2) (6,3,3) (6,3,4) (6,3,5) (6,3,6) (6,4,1) (6,4,2) (6,4,3) (6,4,4) (6,4,5) (6,4,6) (6,5,1) (6,5,2) (6,5,3) (6,5,4) (6,5,5) (6,5,6) (6,6,1) (6,6,2) (6,6,3) (6,6,4) (6,6,5) (6,6,6)

I casi possibili



I **casi possibili** che si possono verificare lanciando tre dadi sono tanti quante sono le sequenze di tre numeri

$$(a, b, c)$$

dove

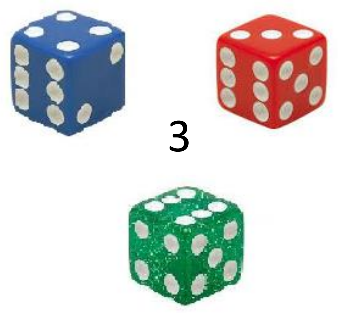
a indica il numero ottenuto col **Dado 1**
b indica il numero ottenuto col **Dado 2**
c indica il numero ottenuto col **Dado 3**.

Il *numero dei casi possibili* è:

6 x 6 x 6 = *216*

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

I casi favorevoli: i tre «fondamenti»



Galilei determina i **casi favorevoli** ad avere come somma un numero fissato col lancio di tre dadi.

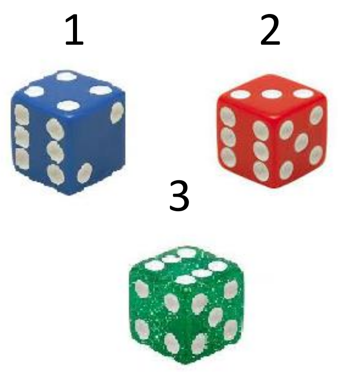
Scrive Galilei:

> ...Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi **tre fondamenti:**
>
> **primo**, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo

Significa che lanciando tre dadi c'è solo un modo di ottenere, ad esempio, esattamente tre 2 ed è:

Dado 1	Dado 2	Dado 3
2	2	2

I casi favorevoli: i tre «fondamenti»

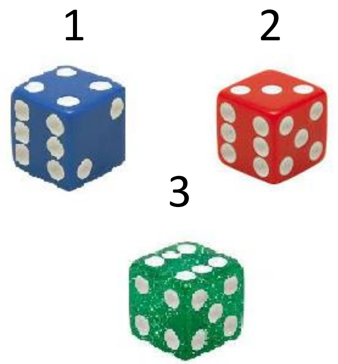


secondo, che le triplicità che nascono da due numeri uguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere

Significa che lanciando tre dadi, ci sono tre modi per ottenere, ad esempio, esattamente due numeri 1 e un numero 4:

Dado 1	Dado 2	Dado 3
4	1	1
1	4	1
1	1	4

I casi favorevoli: i tre «fondamenti»



terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere

Significa che lanciando tre dadi, ci sono ben sei modi di ottenere, ad esempio, un 3, un 2 e un 1:

Dado 1	Dado 2	Dado 3
3	2	1
3	1	2
2	3	1
2	1	3
1	3	2
1	2	3

Proposta di lavoro

Riformulare i «fondamenti» di Galilei col linguaggio del calcolo combinatorio

I casi favorevoli per il 6

Galilei riassume con questa tabella i **casi favorevoli** per la **somma uguale a 6**:

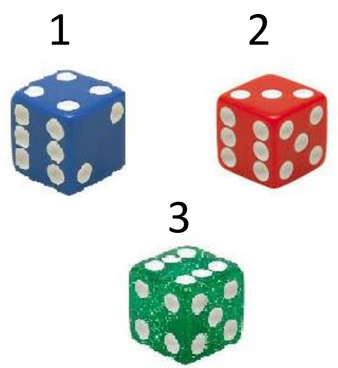
6	
4.1.1	3
3.2.1	6
2.2.2	1
	10

La tabella di Galilei

Galilei determina il numero dei casi favorevoli
per i numeri da 3 a 10 e crea la seguente tabella:

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1	6	6.2.1	6	6.1.1	3	5.1.1	3	4.1.1	3	3.1.1	3	2.1.1	3	1.1.1	1
6.2.2	3	5.3.1	6	5.2.1	6	4.2.1	6	3.2.1	6	2.2.1	3		3		1
5.4.1	6	5.2.2	3	4.3.1	6	3.3.1	3	2.2.2	1		6				
5.3.2	6	4.4.1	3	4.2.2	3	3.2.2	3		10						
4.4.2	3	4.3.2	6	3.3.2	3		15								
4.3.3	3	3.3.3	1		21										
	27		25												

I numeri compresi tra 11 e 18?



Galilei nota che il **numero dei casi favorevoli** per la somma

X

è uguale a quello di

21-X

quindi

il 3 è come il 18

il 4 è come il 17

il 5 è come il 16

……………………………………………………………

il 10 è come l' 11

Proposta di lavoro

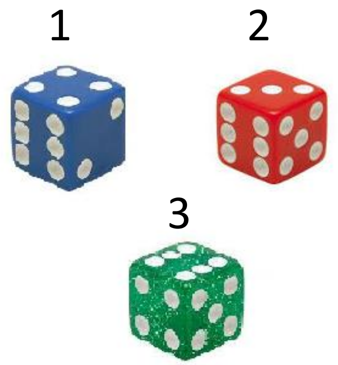
Dimostrare che il **numero dei casi favorevoli** per la somma

X

è uguale a quello di

21-X

I numeri compresi tra 11 e 18?



Consideriamo

$$(a , b , c)$$

a indica il numero uscito col lancio del **Dado 1**,
b indica il numero uscito col lancio del **Dado 2**,
c indica il numero uscito col lancio del **Dado 3**.

La somma è

$$x = a + b + c$$

Le facce opposte, quelle che poggiano sul tavolo, sono

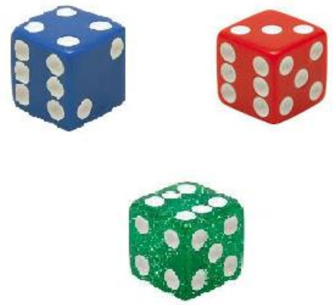
$$(7 – a , 7 – b , 7 – c)$$

e la somma di queste facce è

$$7 - a + 7 - b + 7 – c = 21 - (a + b + c) = 21-x$$

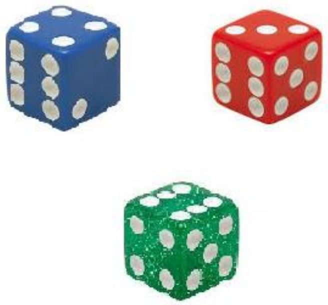
I casi favorevoli

Somma delle 3 facce	N. casi favorevoli
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15
8	21
9	25
10	27
11	27
12	25
13	21
14	15
15	10
16	6
17	3
18	1



216 casi possibili

Probabilità per il 6



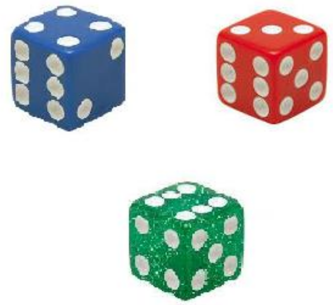
$$P(\text{somma} = 6) = \frac{\textbf{numero dei casi favorevoli alla somma uguale a 6}}{\textbf{numero dei casi possibili}}$$

$$= \frac{10}{216}$$

$$= 4.63\%$$

La zara è svelata!

Somma	N. casi favorevoli	Probabilità
10 o **11**	**27**	$\frac{27}{216}$ = **12.5%**
9 o 12	25	$\frac{25}{216}$ = 11.57%
8 o 13	21	$\frac{21}{216}$ = 9.72%
7 o 14	15	$\frac{15}{216}$ = 6.94%
6 o 15	10	$\frac{10}{216}$ = 4.63%
5 o 16	6	$\frac{6}{216}$ = 2.78%
4 o 17	3	$\frac{3}{216}$ = 1.39%
3 o 18	1	$\frac{1}{216}$ = 0.46%



Proposte di lavoro

Scrivere «fondamenti» analoghi a quelli di Galilei per il gioco della zara con 4 dadi

Congetturare su quale numero convenga puntare nel gioco della zara con 4 dadi e scrivere per quel numero la tabella ‘‘alla Galilei’’

Una frase di Galilei

«Si vede non di meno, che la ***lunga osservazione*** *ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il 10. e l'11. che il 9. e il 12.»*

Domanda:

La frequenza sperimentale è una approssimazione della probabilità?

Lancio di una moneta

Nel 1700 il naturalista francese Buffon ha lanciato una moneta 4040 volte ottenendo testa 2048 volte.

Il conte di Buffon (1707-1788)

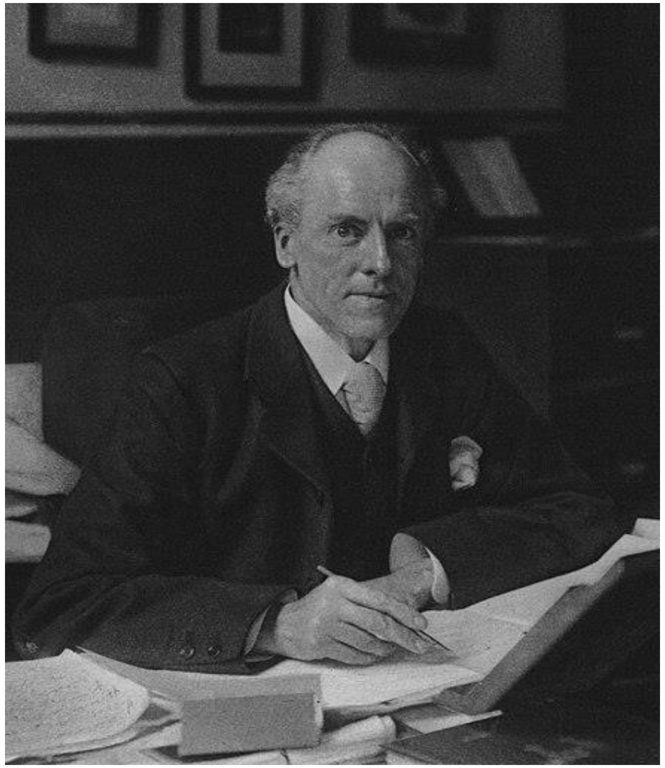
2048

1992

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Lancio di una moneta

Lo statistico inglese Pearson ha lanciato una moneta 12000 volte ottenendo 6019 volte testa.

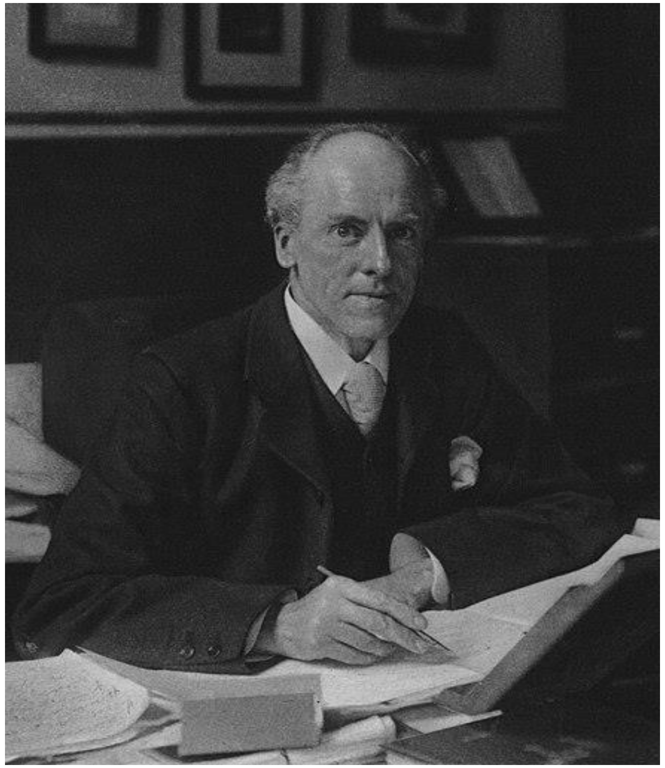


Karl Pearson
(1857-1936)

6019 5981

Lancio di una moneta

Successivamente lanciò una moneta 24000 volte ottenendo testa 12012 volte.



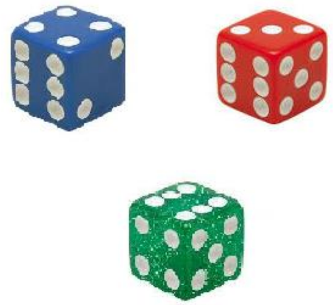
Karl Pearson
(1857-1936)

12012 11988

Lancio di una moneta

Autore	N. delle teste	N. dei lanci	Frequenza sperimentale
Buffon	2048	4040	$\frac{2048}{4040}$ = **50.69%**
Pearson	6019	12000	$\frac{6019}{12000}$ = **50.16%**
Pearson	12012	24000	$\frac{12012}{24000}$ = **50.05%**

Frequenza sperimentale



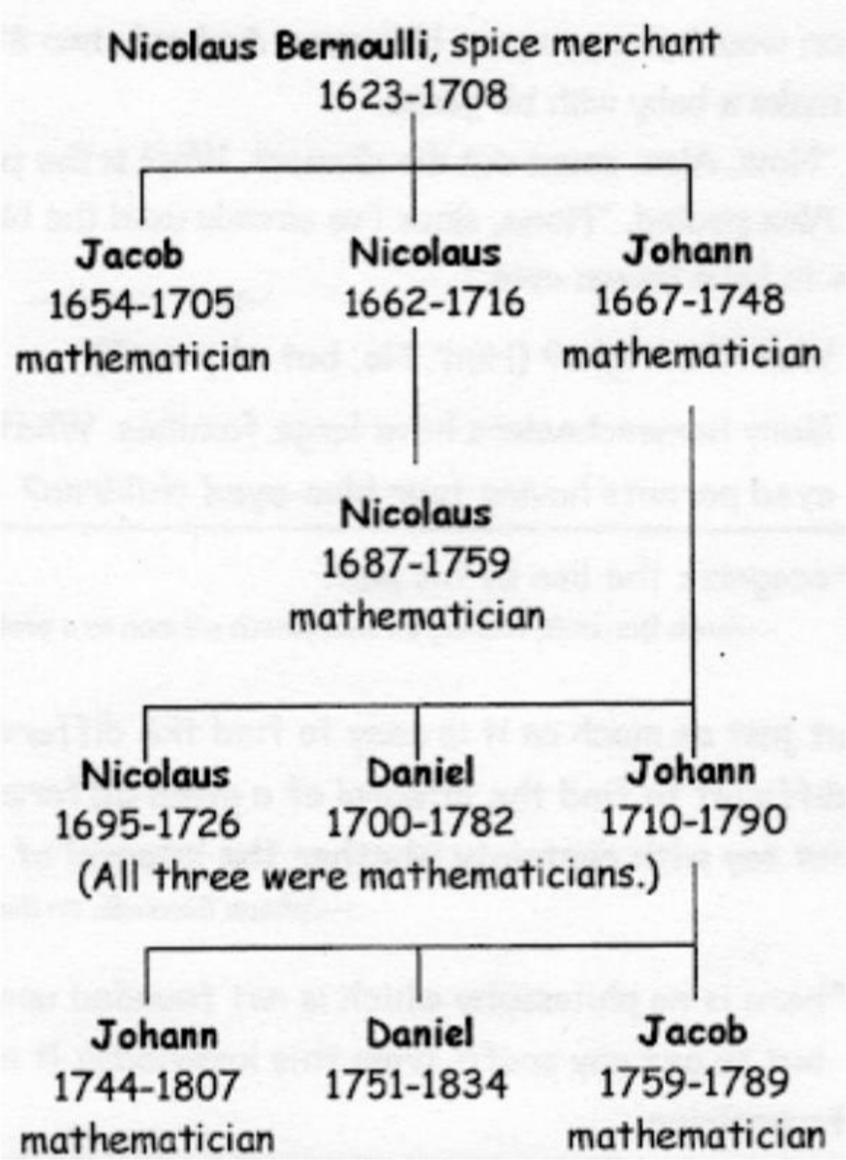
Supponiamo di ripetere tantissime volte l'esperimento di lanciare tre dadi.

Poi calcoliamo il rapporto

$$\frac{\textbf{numero dei lanci che hanno avuto come esito 6}}{\textbf{numero dei lanci fatti}}$$

Si ottiene così una **frequenza sperimentale** del numero 6.

La famiglia Bernoulli




Jacob (1654-1705)


Johann (1667-1748)

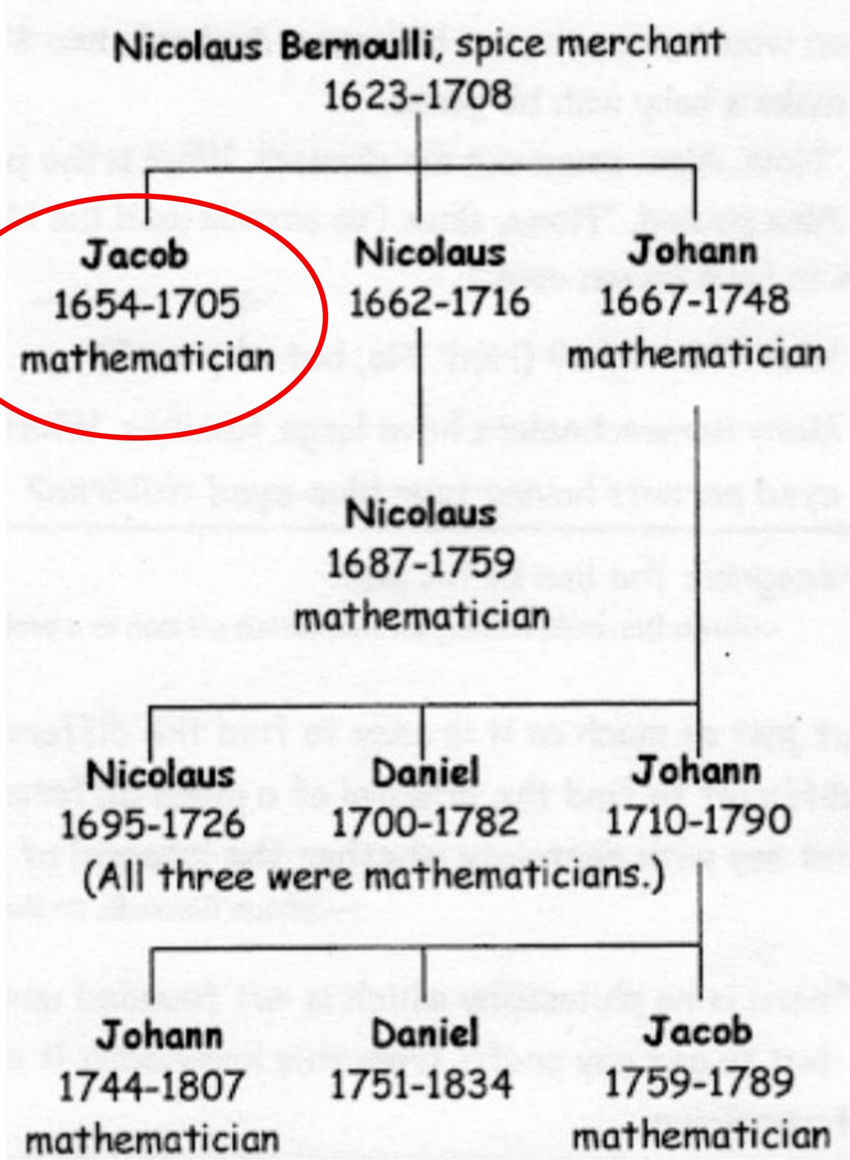

Nicolaus II (1695-1726)


Daniel (1700-1782)


Johann III (1744-1807)


Jacob II (1759-1789)

Jacob Bernoulli




Jacob (1654-1705)


Johann (1667-1748)


Nicolaus II (1695-1726)


Daniel (1700-1782)


Johann III (1744-1807)


Jacob II (1759-1789)

Jacob Bernoulli e Gottfried von Leibniz

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Gottfried W. von Leibniz (1646-1716)

1703: la lettera di Bernoulli a Leibniz

"Mi piacerebbe molto sapere, caro signore, da chi ha saputo che ho elaborata una **teoria della stima delle probabilità**. (...)
Avevo il desiderio di scrivere un trattato su questo argomento. Ma spesso lo metto da parte per interi anni perché **la mia naturale pigrizia**, aggravata dalle mie malattie, mi rendeva molto riluttante a mettermi a scrivere. (...)
Tuttavia, ho completato la maggior parte del libro, ma manca la parte più importante, in cui insegno come i **principi dell'arte di fare previsioni** sono applicati a questioni civili, morali e economiche."

Il libro di Jacob Bernoulli

Il libro fu poi scritto e pubblicato postumo nel 1713 col titolo

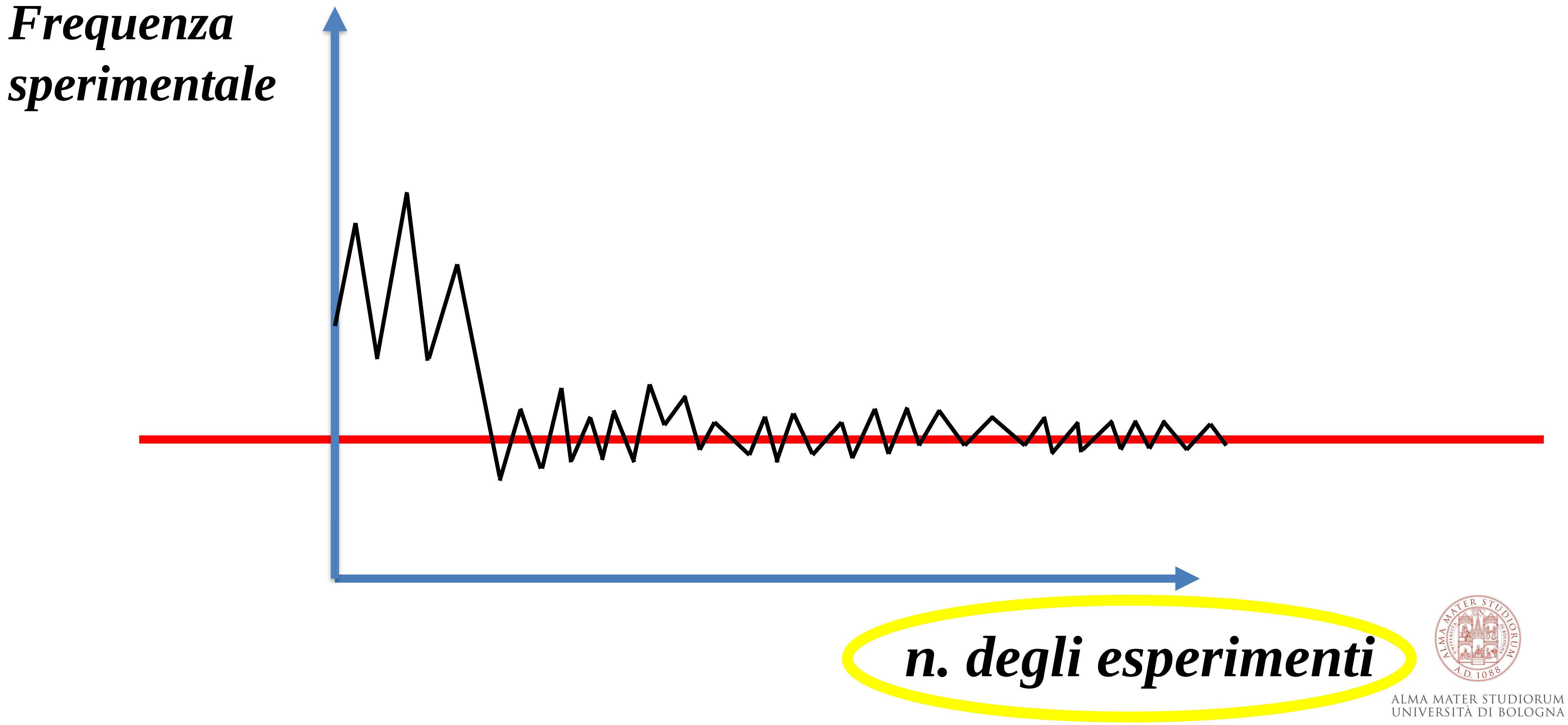
Ars Conjectandi *(L'arte di fare previsioni)*

dal nipote Nicolaus, otto anni dopo la morte di Jacob Bernoulli.

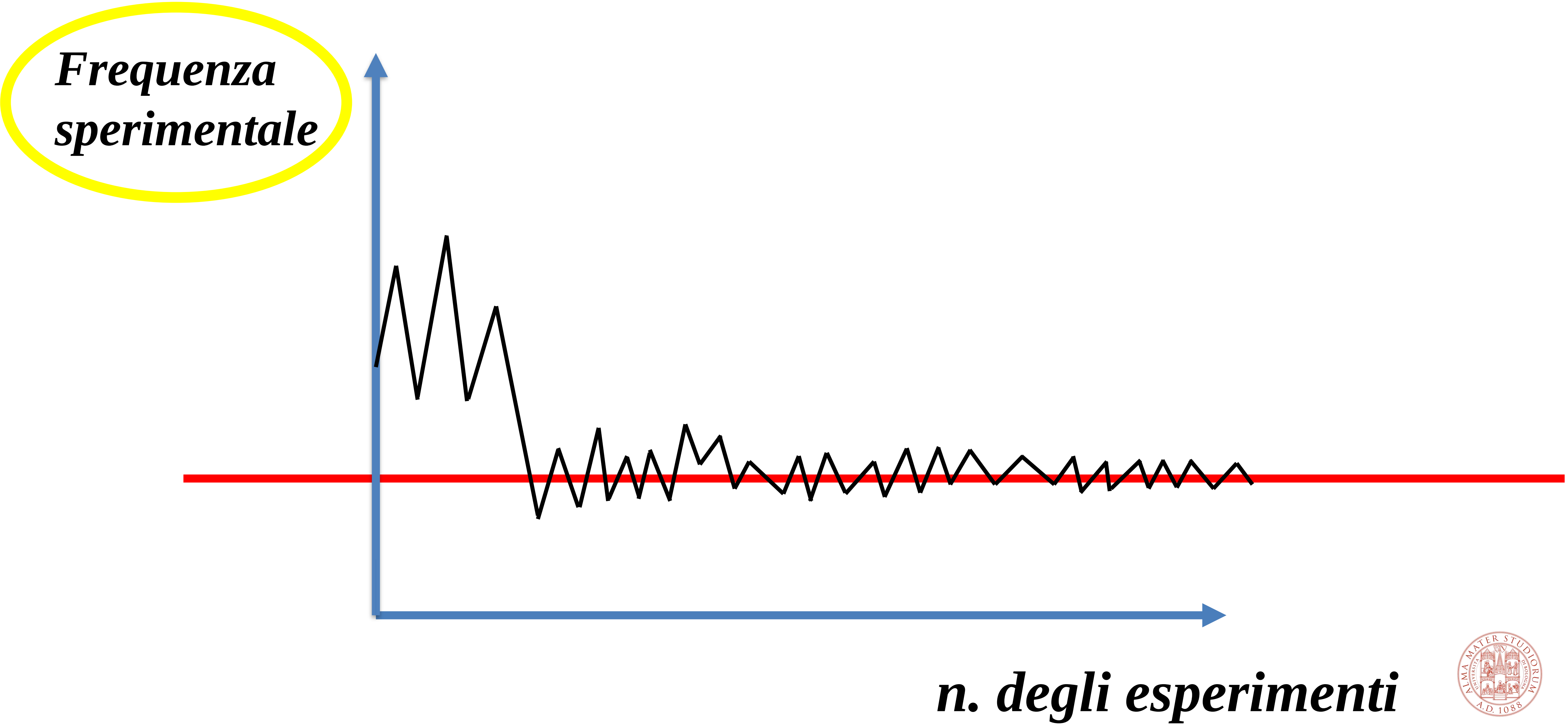
Legge dei Grandi Numeri

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

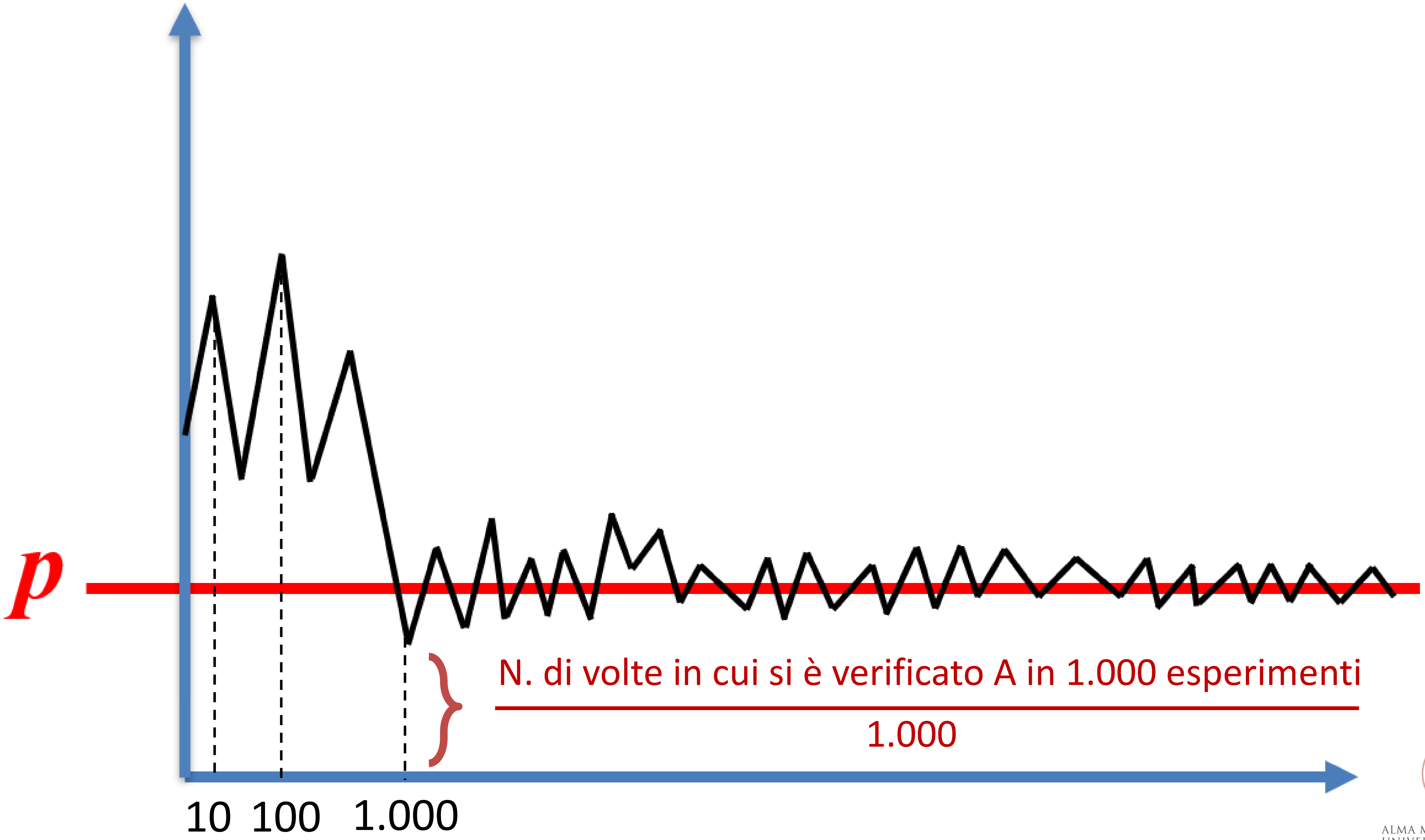
Il grafico del francobollo

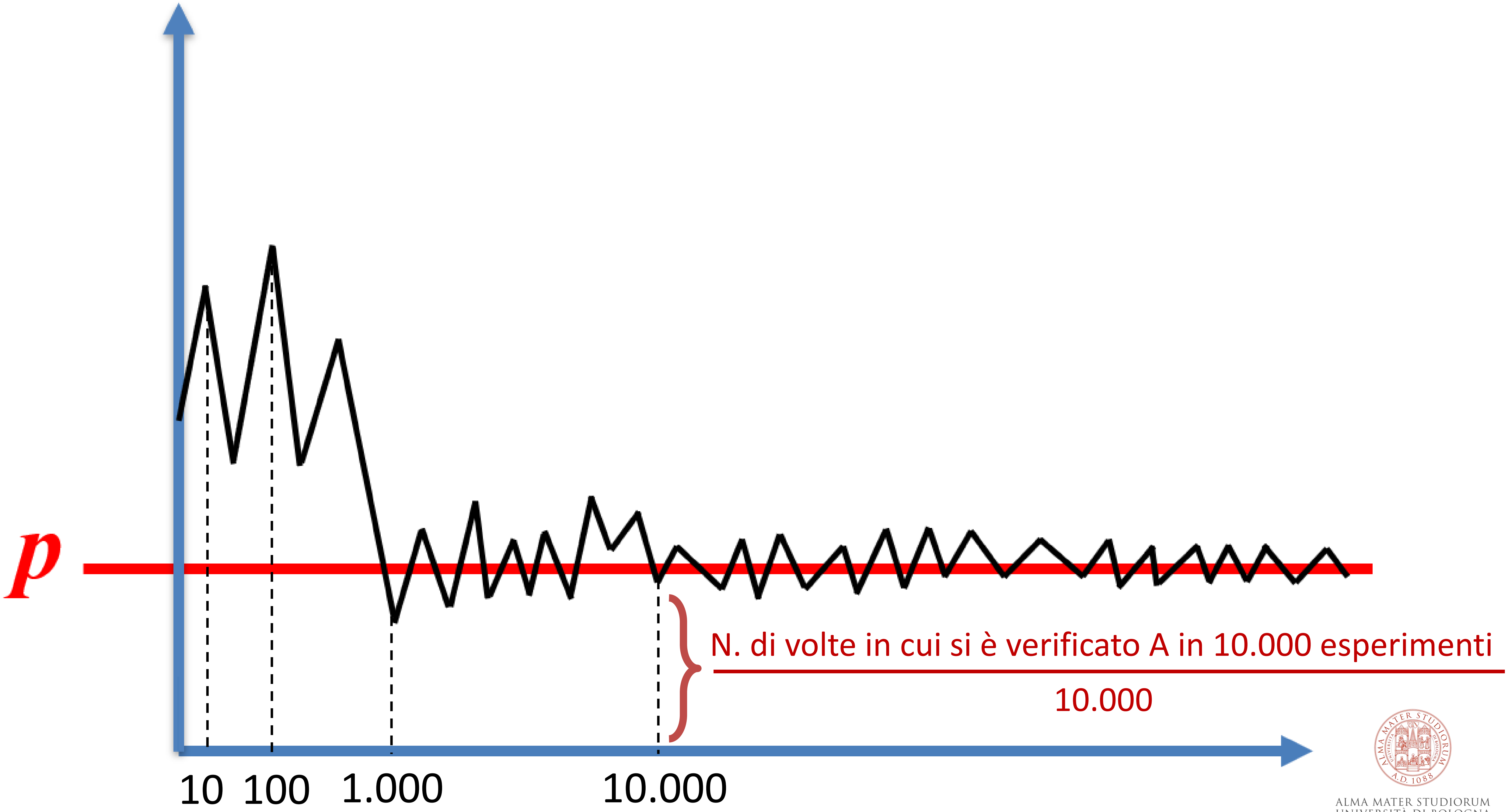


Il grafico del francobollo

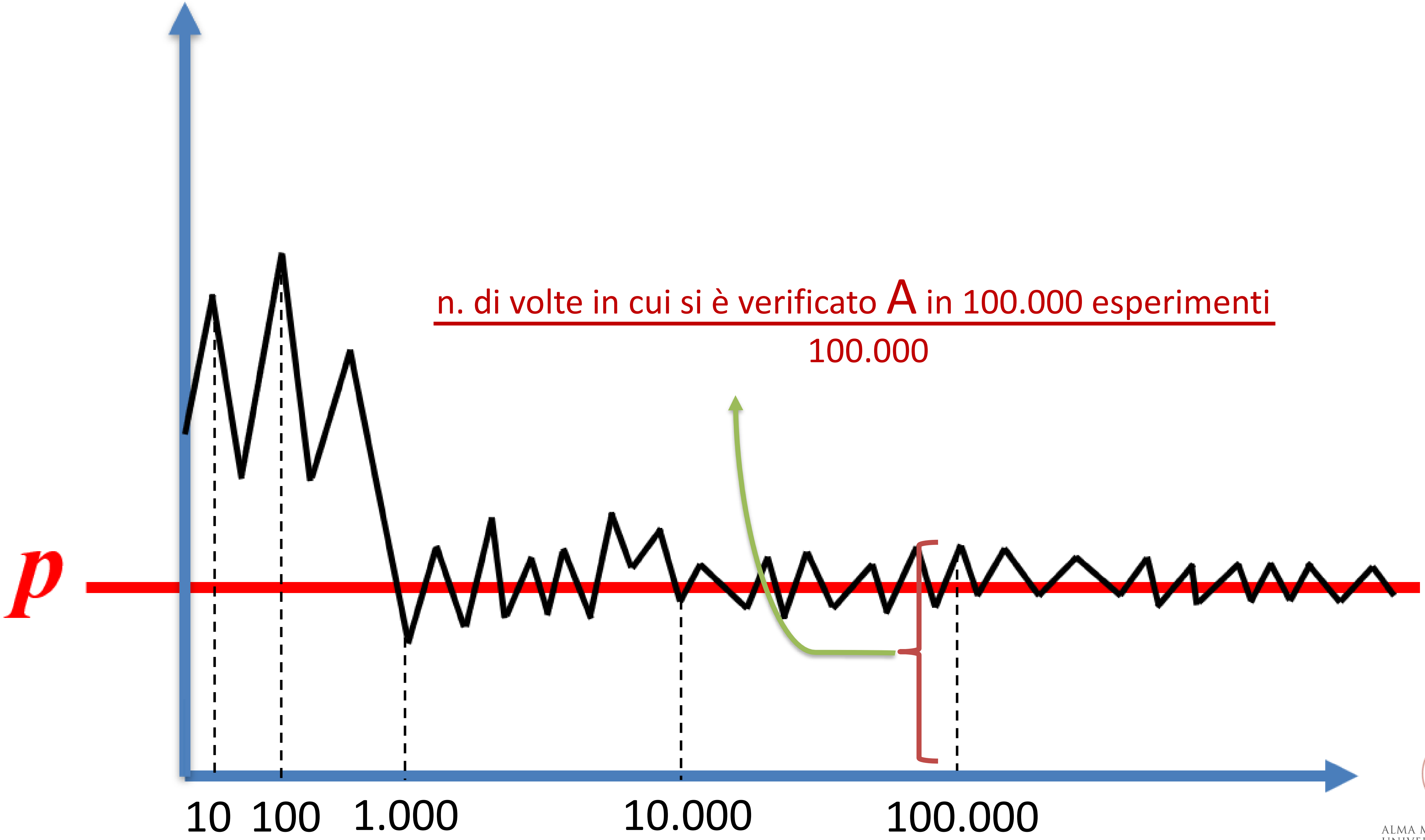


ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

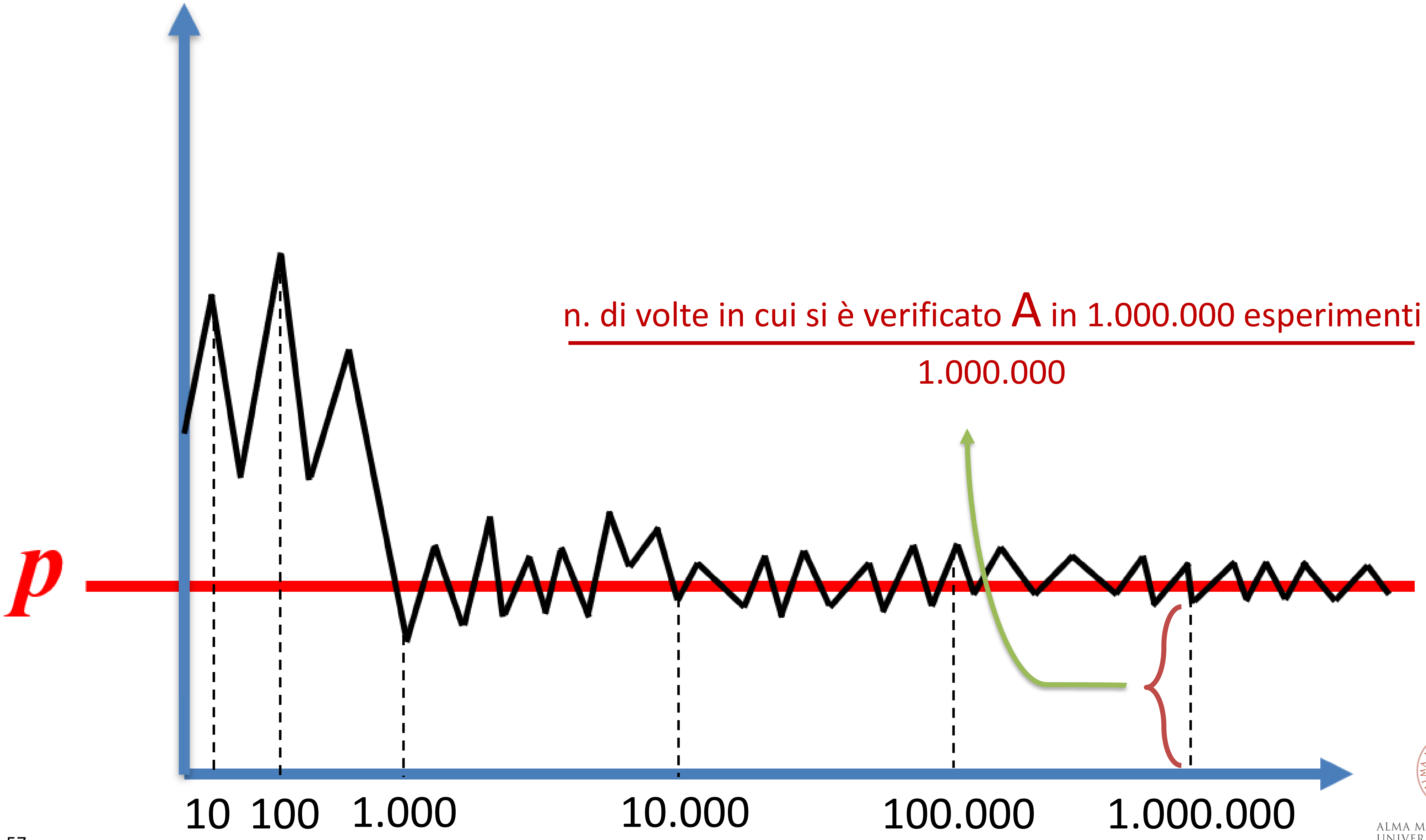

p
N. di volte in cui si è verificato A in 1.000 esperimenti
1.000
10 100 1.000



p
$\frac{\text{N. di volte in cui si è verificato A in 10.000 esperimenti}}{10.000}$
10
100
1.000
10.000

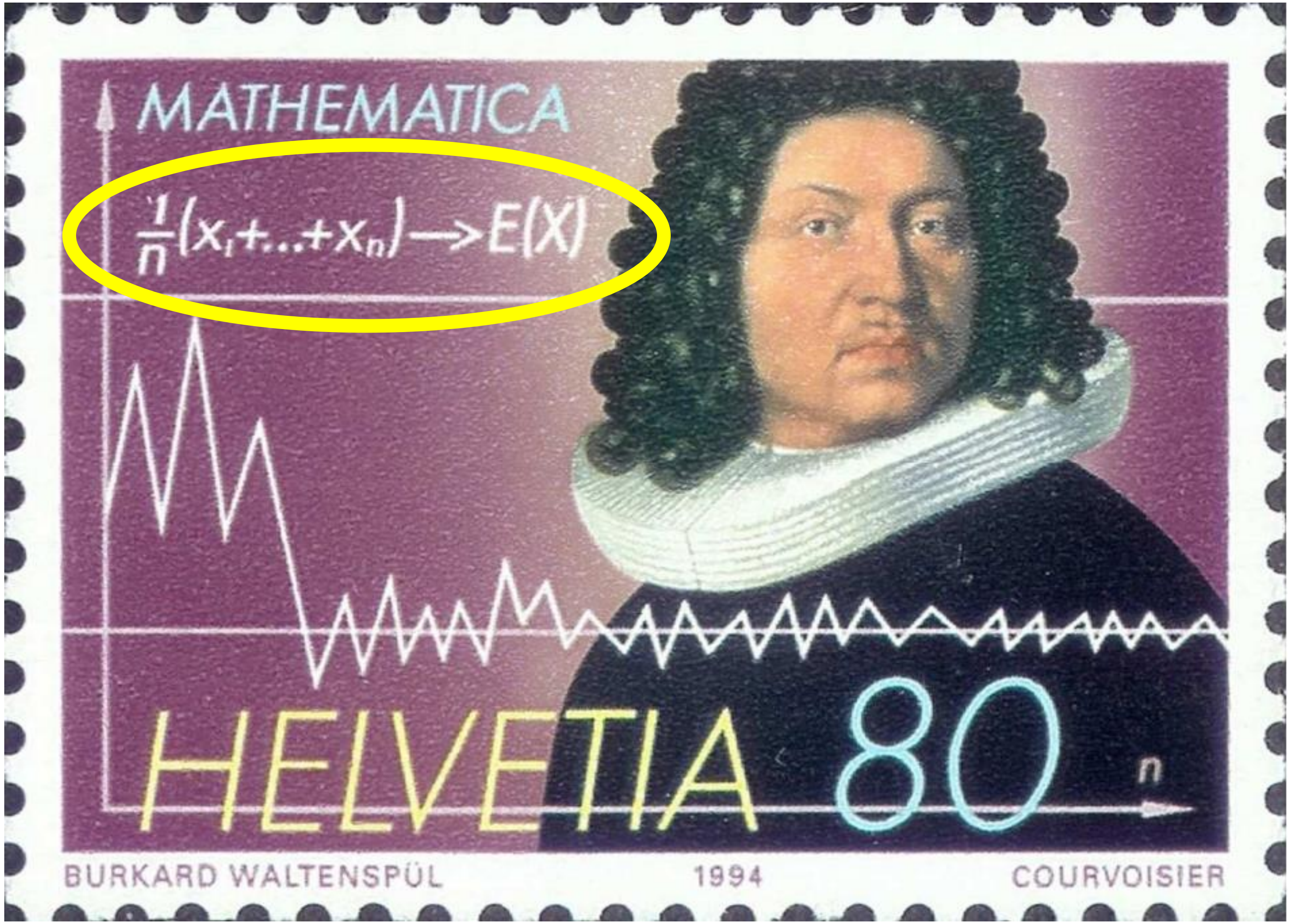


n. di volte in cui si è verificato A in 100.000 esperimenti
100.000
p
10
100
1.000
10.000
100.000



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Legge dei Grandi Numeri



Legge dei Grandi Numeri
di J. Bernoulli (1713) e E. Borel (1909)

La frequenza sperimentale
è una approssimazione
della probabilità

$$\frac{k(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$$

Jacob Bernoulli
(1654-1705)

Émile Borel
(1871-1956)

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Legge dei Grandi Numeri di J. Bernoulli (1713) e E. Borel (1909)

Si ripete un esperimento n volte e $k(n)$ è il numero di volte che si verifica l'evento A. Ogni volta l'evento A ha probabilità p di verificarsi. Allora

$$\frac{k(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$$

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Émile Borel (1871-1956)

Legge dei Grandi Numeri

Ecco come spiega il teorema di Jacob Bernoulli lo scienziato **Siméon D. Poisson** nel **1837**:

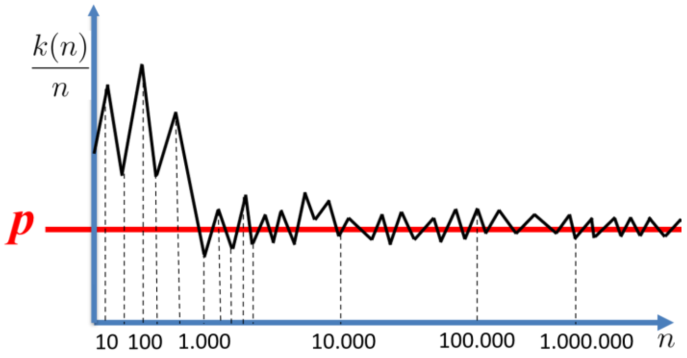
"Le cose di ogni tipo di natura sono soggette a una legge universale che si potrebbe ben chiamare la ***Legge dei Grandi Numeri***.
Consiste nel fatto che se si osserva un gran numero di eventi della stessa natura dipendenti da cause che sono costanti e cause che variano irregolarmente, ... , si trova che **le proporzioni dell'occorrenza sono quasi costanti**"

Le **proporzioni dell'occorrenza** sono le **frequenze sperimentali**, le quali si stabilizzano, per un numero grande di esperimenti, attorno a un unico valore.

La scimmia istruita

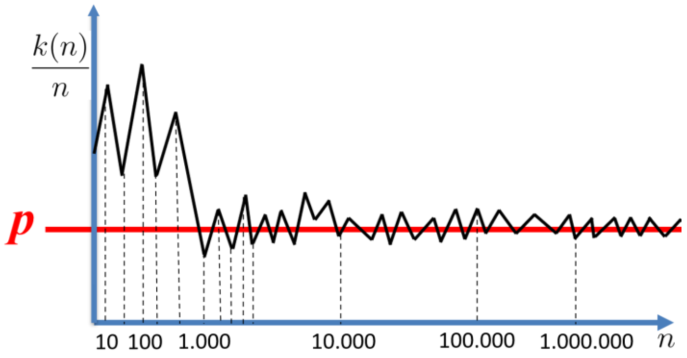
Di Borel è famoso il *paradosso della scimmia istruita*: teorema secondo il quale una scimmia che scrive a caso con una macchina da scrivere prima o poi finirà per scrivere la Divina Commedia.

Legge dei Grandi Numeri



Se conosciamo la **probabilità teorica** p (a priori) che un evento si verifichi, allora
la **frequenza sperimentale** con la quale l'evento si verifica in n prove approssima p in modo sempre più preciso man mano che n diventa più grande.

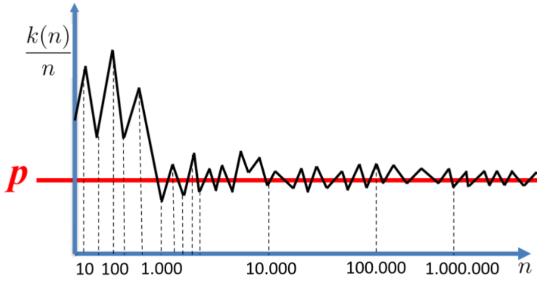
Legge dei Grandi Numeri



Ma Jacob Bernoulli va oltre:

se la probabilità teorica p è ignota, una sua stima può essere conosciuta ***a posteriori*** con la sperimentazione.

Legge dei Grandi Numeri



Ecco cosa scrive Jacob Bernoulli.

Ars conjectandi (1713)

Ciò che non può essere conosciuto a priori

può essere rivelato a posteriori

dai risultati osservati tante volte in situazioni simili,

dal momento che si dovrebbe presumere che qualcosa possa o non possa accadere in futuro nello stesso modo come è stato osservato accadere o non accadere in circostanze simili nel passato.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Legge dei Grandi Numeri

Supponiamo di avere un’urna contenente **400 palline**.

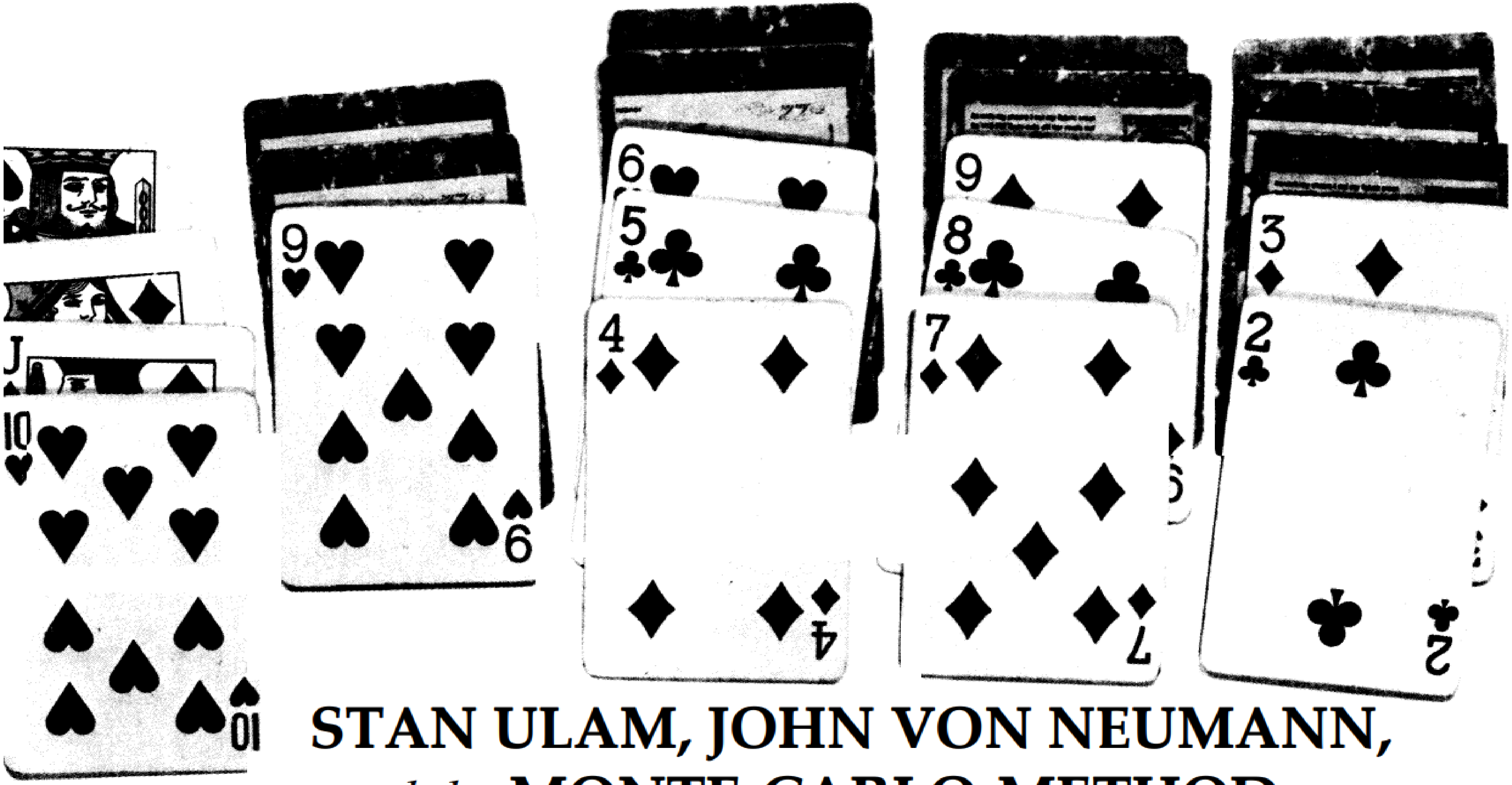
Se di queste **100 sono bianche**, allora la probabilità a priori di estrarre una palla bianca dall’urna è **1/4**.

Ma **se non conosciamo quante siano le palle nell’urna e quante di queste siano bianche,**

possiamo ottenere

una stima della percentuale delle palle bianche

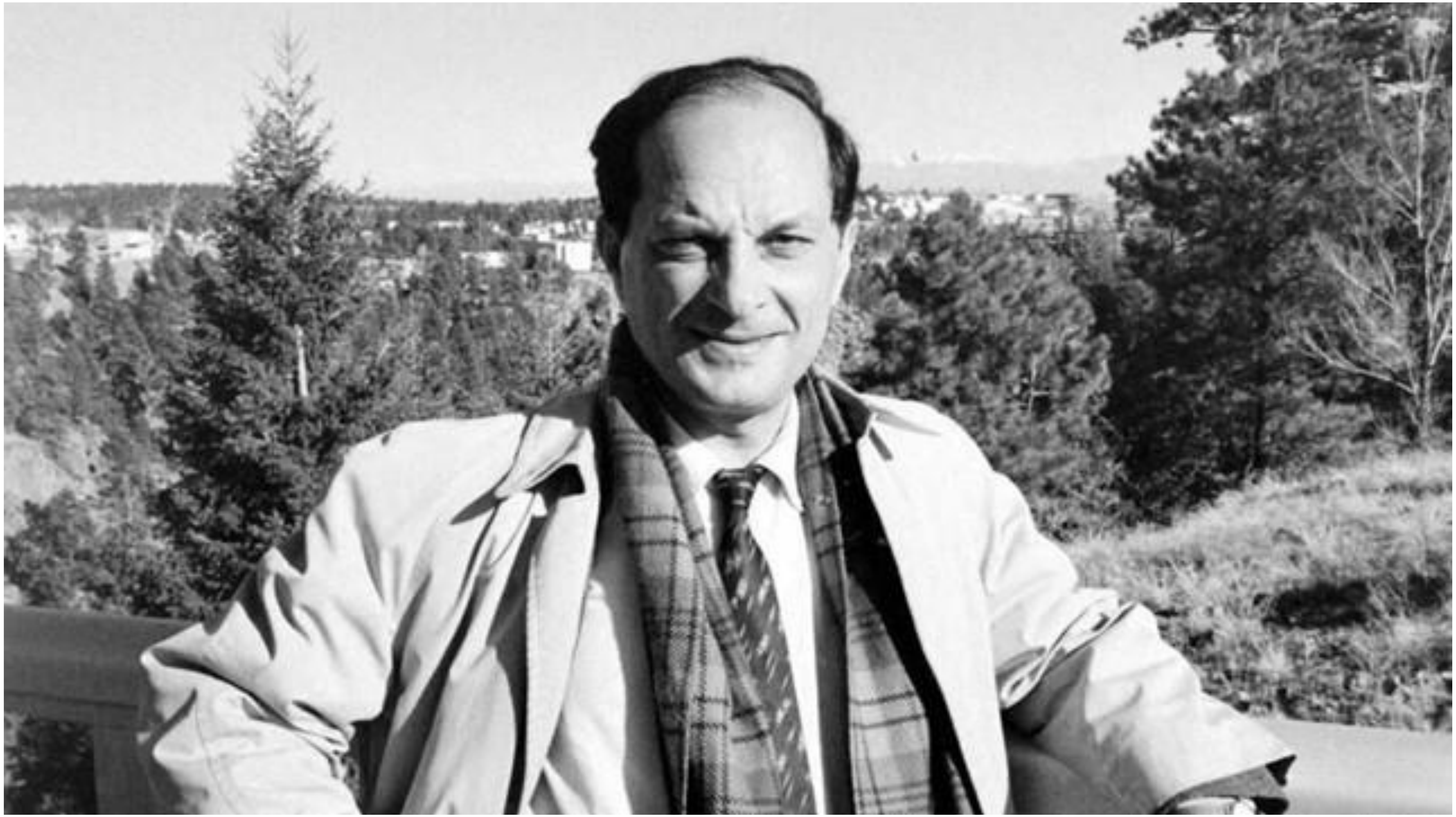
ripetendo tante volte l’esperimento di estrarre una palla dall’urna e calcolando con quale frequenza è uscita una palla bianca.



STAN ULAM, JOHN VON NEUMANN, *and the* MONTE CARLO METHOD

by Roger Eckhardt

Stanislaw Ulam (1909-1984)



John von Neumann (1903-1957)

Nell'articolo è scritto:

ing solitaires. The question was what are the chances that a Canfield solitaire laid out with 52 cards will come out successfully? After spending a lot of time trying to estimate them by pure

combinatorial calculations, I wondered whether a more practical method...

Chi era Stanislaw Ulam?

Stan Ulam (1909-1984) è un matematico polacco.

Nel 1935, a 26 anni, accettò l'invito da parte di John von Neumann di visitare l'Istituto di Studi Avanzati di Princeton, negli USA.

Dal 1941 al 1943, fu assistente all'università del Wisconsin nel Madison.

Nell'inverno del 1943 notò che diversi colleghi non si recavano più al lavoro.

Non riusciva a capirne il motivo.

Ulam incontra von Neumann

Poco tempo dopo Ulam ricevette un invito da parte di von Neumann per parlare di un lavoro **di cui non poteva specificare i dettagli**.

Incuriosito, Ulam decise di incontrare l'amico.

Parlarono di matematica, fisica e altri argomenti interessanti, nonché dell'importanza di questo

lavoro top secret.

Il lavoro top secret

successfully? After spending a lot of time trying to estimate them by pure

Los Alamos Science **Special Issue** ***1987***

Ecco il lavoro top secret!

Los Alamos

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Los Alamos è una città della contea di Los Alamos nel Nuovo Messico, negli Stati Uniti. Qui è stata costruita la prima bomba atomica al mondo, che era l'obiettivo principale del Progetto Manhattan da parte del Los Alamos National Laboratory durante la seconda guerra mondiale. La

Stanislaw Ulam

Terminato il conflitto, Ulam diventa professore di matematica all'**Università della California** a Los Angeles.

Tuttavia, il laboratorio di Los Alamos ricevette altri fondi governativi per la costruzione di una nuova superbomba.

Nella primavera del 1946 Stan Ulam decise di

tornare a Los Alamos.

Stanislaw Ulam

Gli scienziati, all’arrivo di Ulam, erano alle prese con **varie difficoltà** e tra queste vi era quella di

dover predire

l’andamento della reazione a catena che si scatenava con la detonazione di una bomba nucleare.

Il solitario di Stanislaw Ulam

Nel 1946 Stan Ulam era convalescente per una malattia.

Passava il tempo facendo un solitario Canfield con un mazzo di 52 carte.

Si chiese quale fosse la probabilità che il solitario termini con successo.

Spese parecchio tempo a tentare di risolvere per via teorica il problema senza riuscirci.

Era una impresa disperata!

Il solitario di Stanislaw Ulam

Basti pensare che in un mazzo di 52 carte, il numero dei modi in cui le carte possono essere ordinate è

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

ossia, circa

$$8 \times 10^{67}$$

L’intero universo osservabile ha un’età di appena

10^{18} secondi.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Il solitario di Stanislaw Ulam

Ulam capì che sarebbe stato molto più semplice ottenere la risposta per via sperimentale.

Ripetendo l'esperimento un numero alto di volte avrebbe ottenuto, per la

legge dei Grandi Numeri,

una **stima della probabilità** di riuscita del solitario con la formula

$$\frac{\text{n. dei solitari riusciti}}{\text{n. dei solitari effettuati}}$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Il solitario di Stanislaw Ulam

Ulam capì anche che a fare i solitari realmente ci voleva troppo tempo.

Il modo più sensato di procedere era

simulare i solitari
con un calcolatore elettronico.

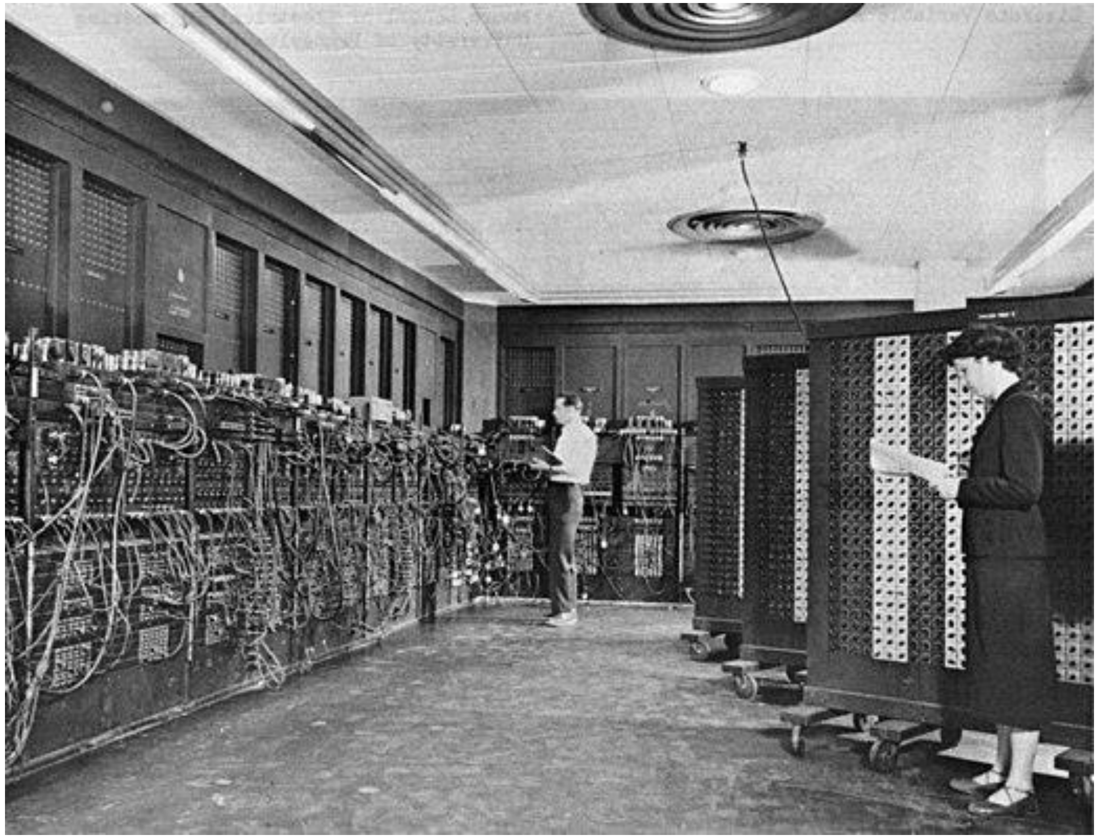
Ma c'erano calcolatori elettronici all'epoca?

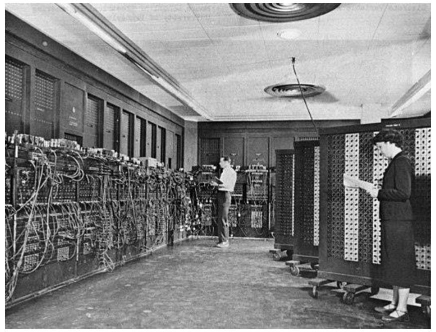
ENIAC

Nel 1945 era stato completato

l’ **ENIAC** (Electronic Numerical Integrator and Computer)

presso la Moore School of Electrical Engineering presso l’Università della Pennsylvania a Filadelfia.





ENIAC

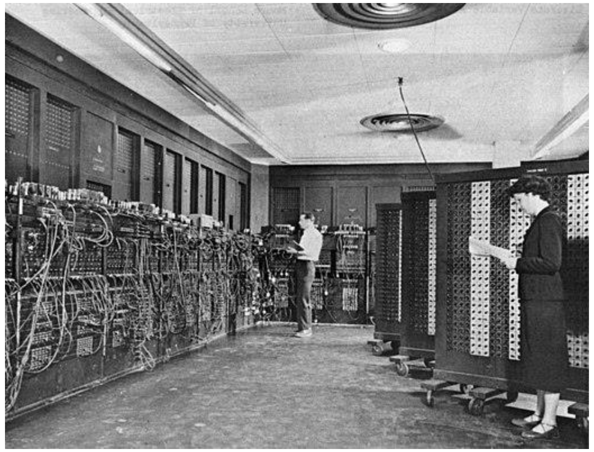
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

L'**Electronic numerical integrator and computer**[1] (**ENIAC**) è, tra quelli di cui si ha notizia,[2] il quarto computer elettronico digitale della storia,[3] il quarto computer Turing completo della storia,[4] il secondo computer elettronico Turing completo della storia[5] e il primo computer elettronico *general purpose* della storia. Suo successore fu l'EDVAC.

L'ENIAC occupava una stanza di metri 9 x 30, pesava 30 tonnellate e svolgeva 300 moltiplicazioni al secondo.

ENIAC

Ulam capì che questa **idea** di far simulare al computer i solitari **poteva servire** a dare una **risposta ai difficili problemi di fisica atomica** in cui era coinvolto, tra i quali:



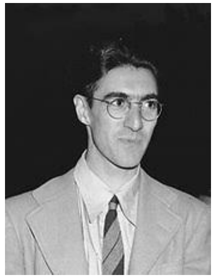
calcolare la frequenza con cui
i neutroni entravano in collisione
e la quantità di energia che veniva rilasciata

cose che non si potevano calcolare con la matematica convenzionale.

von Neumann, Richtmayer, Metropolis

Ulam parlò all'amico von Neumann della sua idea di fare simulazioni col computer.

L'11 marzo 1947 von Neumann scrisse una lettera a Robert Richtmayer, capo della Divisione Teorica, in cui parlava della possibilità di



utilizzare i metodi statistici
per risolvere il problema della diffusione dei neutroni.

Von Neumann, Richtmayer e il fisico Nicholas Metropolis, definirono a grandi linee come risolvere il problema della reazione

simulando ripetutamente

collisioni di neutroni col calcolatore elettronico.

Il Metodo Monte Carlo

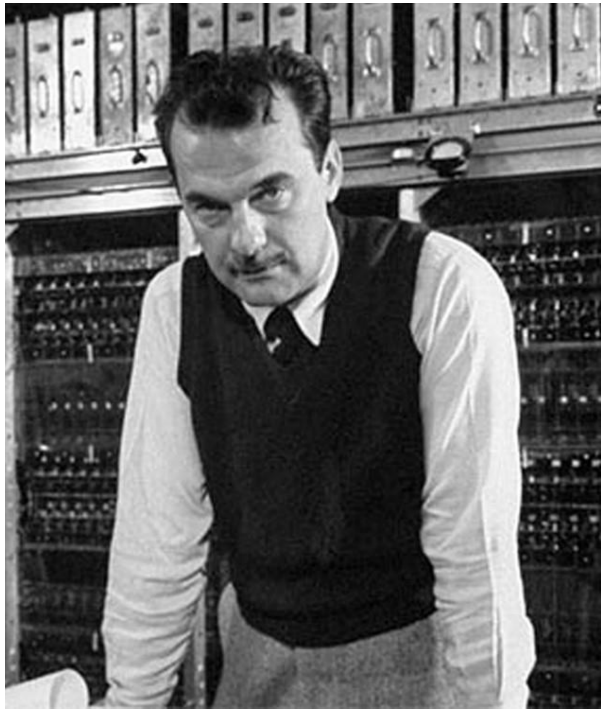
Fu Metropolis a decidere il nome di questo nuovo metodo,

prendendo spunto da uno zio di Ulam che si faceva prestare denaro dai parenti perché

“doveva andare a giocare a Monte Carlo”

lo chiamò

metodo Monte Carlo.

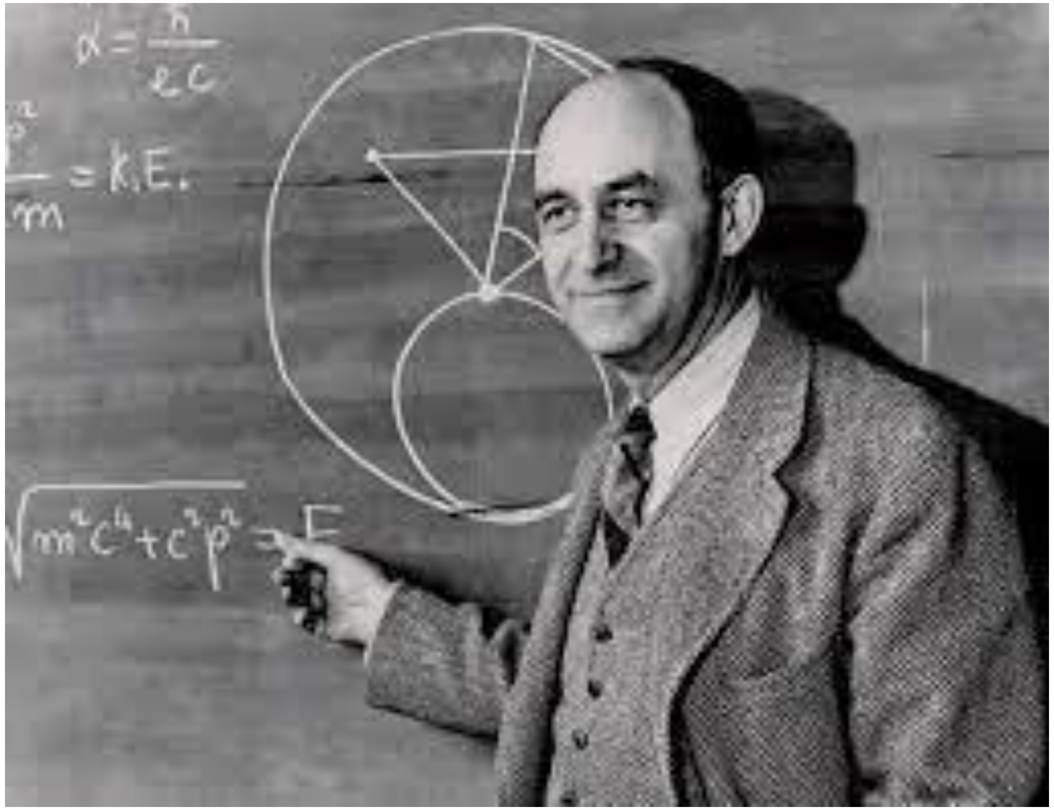


N. Metropolis
(1915-1999)

La prima analisi con il metodo Monte Carlo, applicato alle reazioni a catena dei neutroni, fu condotta nel 1947, utilizzando l’ENIAC.

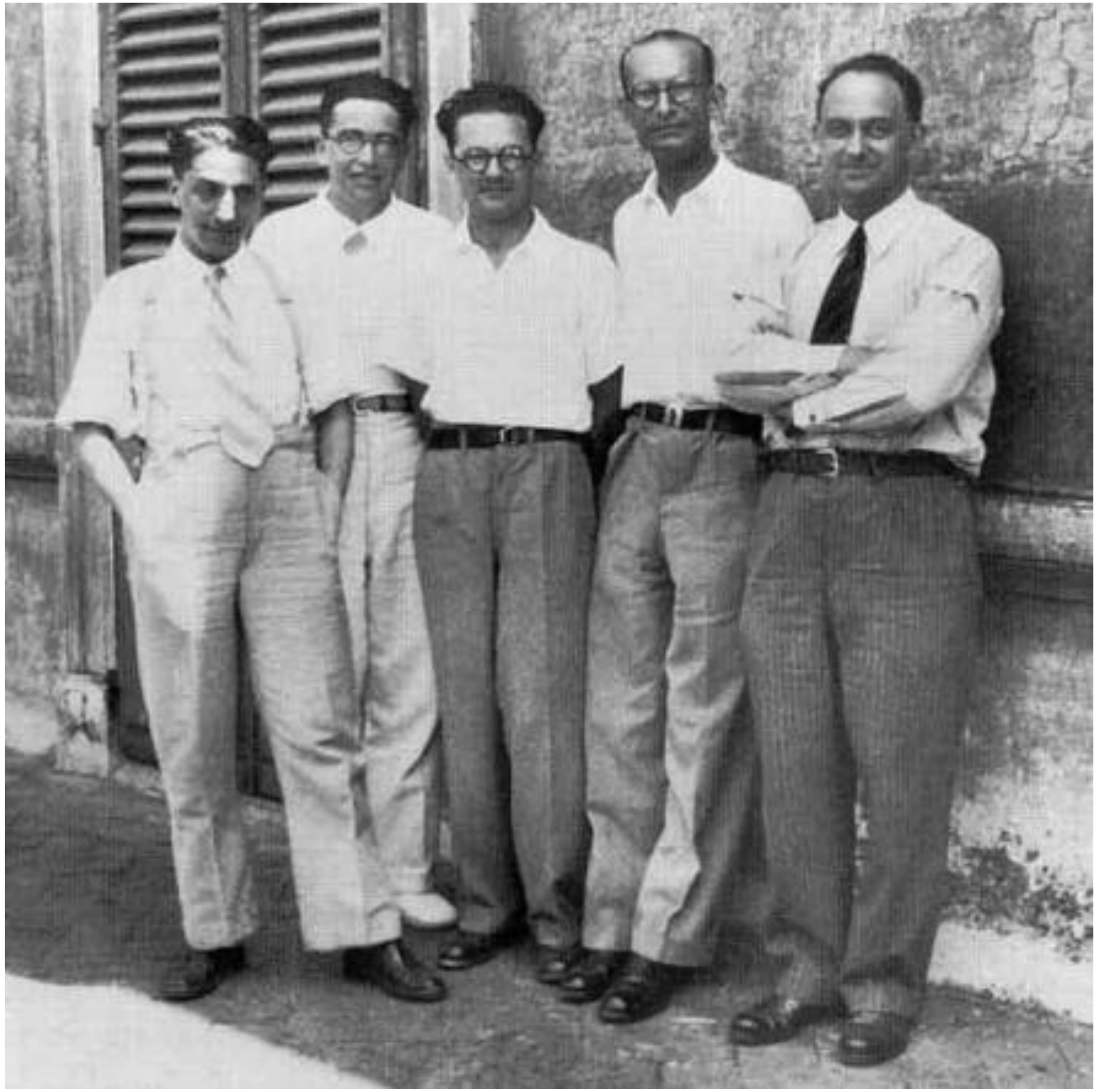
Enrico Fermi (1901-1954)

Tra gli scienziati a Los Alamos, oltre a Ulam e von Neumann, c'era anche Enrico Fermi.



Enrico Fermi, premio Nobel per la fisica nel 1938

I ragazzi di via Panisperna



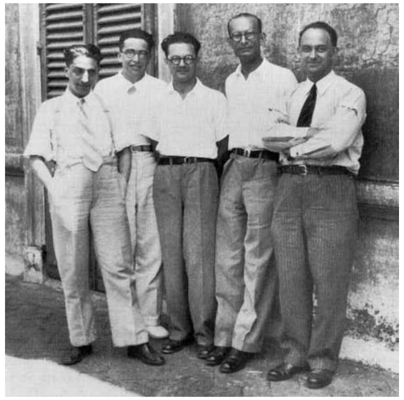
Nella foto da sinistra:

Oscar D'Agostino,
Emilio Segrè,
Edoardo Amaldi,
Franco Rasetti
Enrico Fermi.

Non presenti in foto:

Ettore Majorana e
Bruno Pontecorvo.

Ragazzi di via Panisperna



Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Ragazzi di via Panisperna è l'appellativo del gruppo di scienziati italiani quasi tutti molto giovani, con a capo Enrico Fermi, che negli anni trenta del Novecento operò presso il Regio istituto di fisica dell'Università di Roma, allora ubicato in via Panisperna n. 90.

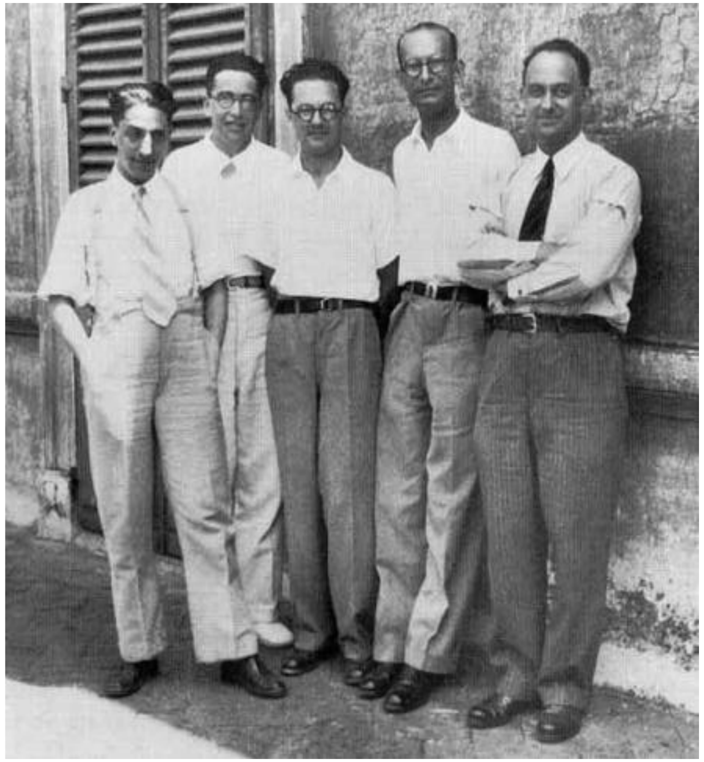
La principale scoperta del gruppo fu, nel 1934, la proprietà dei neutroni lenti, che portò al premio Nobel per Enrico Fermi e diede avvio alla realizzazione del primo reattore nucleare e successivamente della bomba atomica.

I ragazzi di via Panisperna

Negli anni trenta, Fermi amava sbalordire i “ragazzi di via Panisperna” con **previsioni** di risultati sperimentali

“**troppo accurate per essere credute**”.

Fermi spiegò solo dopo che le sue previsioni erano il frutto di **sperimentazioni statistiche**, fatte usando una calcolatrice meccanica quando l’insonnia lo colpiva nelle prime ore del mattino.



Fermi aveva creato, indipendentemente, il **metodo Monte Carlo** ben 15 anni prima degli inizi ufficialmente riconosciuti!

Fine della prima parte.

Grazie per l’attenzione!

Seconda parte: sperimentazione!

Primo Esperimento

Gioco della zara (in due modalità)

Secondo Esperimento

Approssimazione di π

Terzo Esperimento

Calcolo dell’integrale

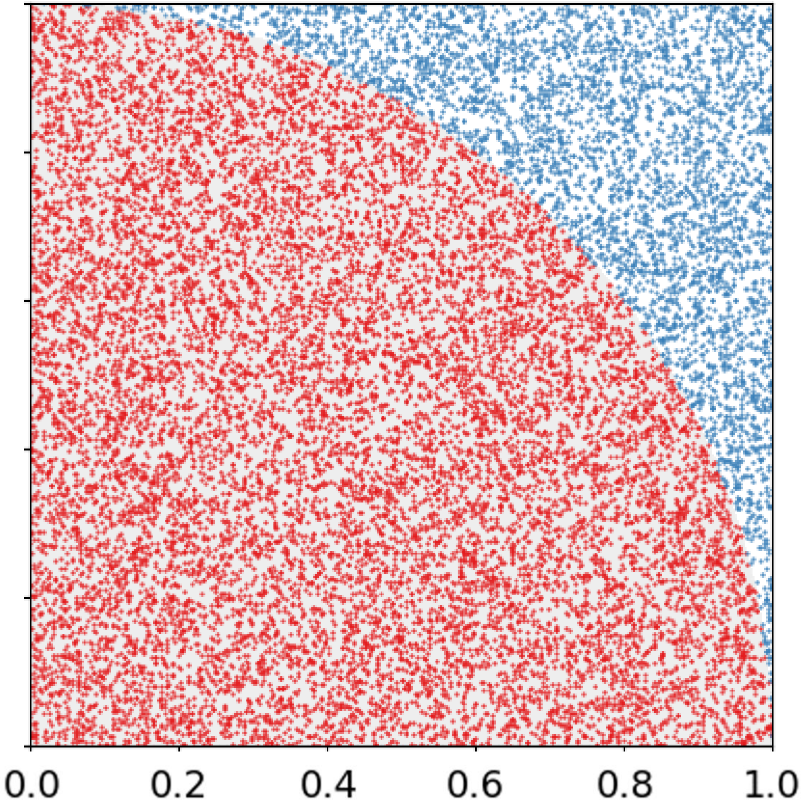
Secondo esperimento

approssimazione di π col Metodo Monte Carlo

Gettiamo “a caso” dei punti nel quadrato.

Qualche punto entrerà nel quarto di cerchio, qualche altro no.

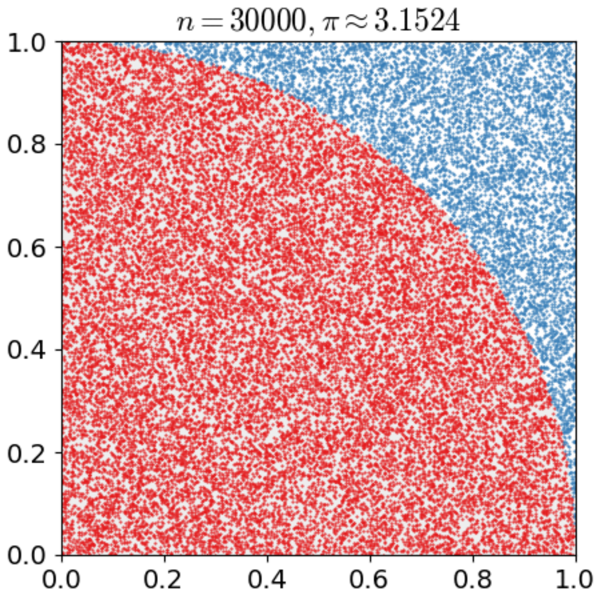
Il rapporto tra il numero dei punti finiti nel quarto di cerchio e il numero totale dei punti gettati dà una **approssimazione dell’area del quarto di cerchio**.



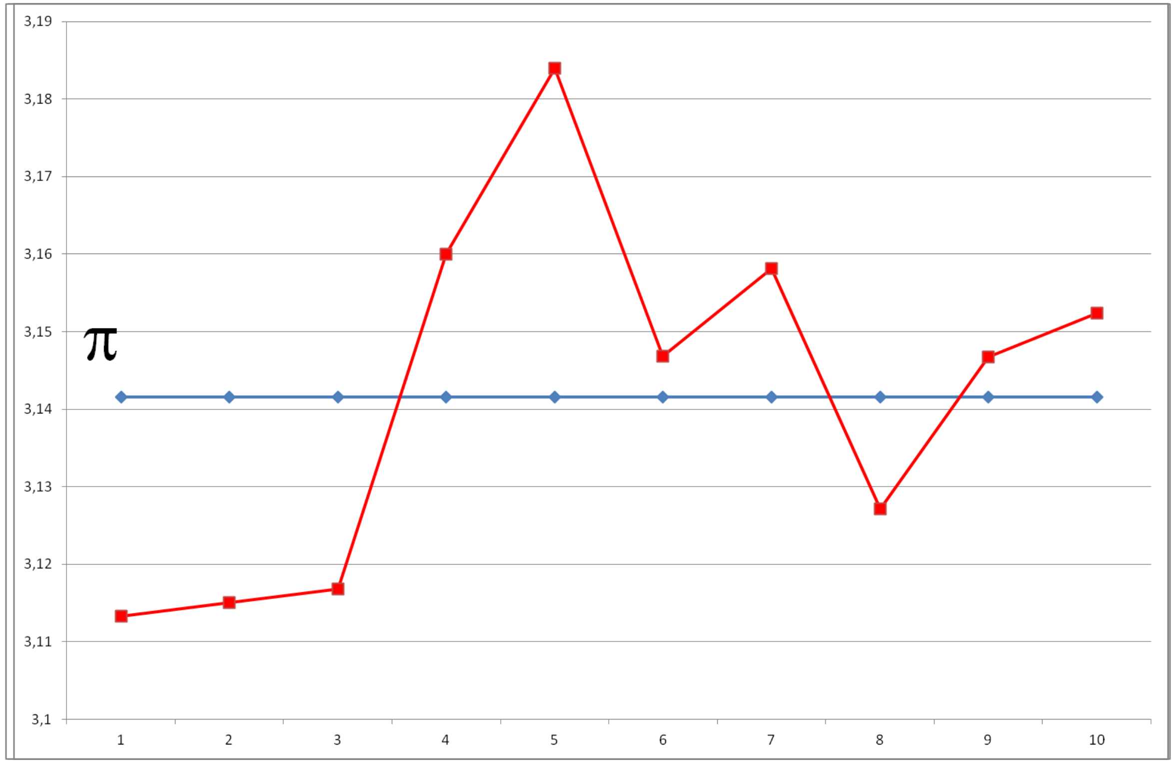
L’area del quarto di cerchio di raggio 1 vale $\pi/4$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Approssimazione di π col Metodo Monte Carlo



30000 punti



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Approssimazione di π col Metodo Monte Carlo

N. punti	Approssimazione di π
3000	**3,1133**
4000	**3,1150**
5000	**3,1168**
6500	**3,1600**
8500	**3,1840**
10000	**3,1468**
15000	**3,1581**
18000	**3,1271**
24000	**3,1467**
30000	**3,1524**

Giovanni Cupini

Dipartimento di Matematica

giovanni.cupini@unibo.it

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA